Серия 7. Комбинаторный винегрет, вторая часть.

1. По кругу в некотором порядке расставлено 2015 нулей и 2015 единиц. Докажите, что есть 16 подряд идущих чисел, среди которых поровну нулей и единиц.

2. В клетках квадрата 100×100 стоят $+1$ или -1. За одну операцию можно поменять знаки у всех чисел в одной строчке или одном столбце. Докажите, что можно добиться того, чтобы в каждой строке и в каждом столбце плюсов было больше, чем минусов.

3. В одной из деревень Шира живут хоббиты. У каждого дверь в нору окрашена в красный или синий цвет. Каждый день один из хоббитов выходит на улицу и, если видит, что цвет его двери отличается от цвета дверей большинства его друзей, перекрашивает свою дверь (предполагаем, что дружба взаимна). Докажите, что когда-то перекрашивания прекратятся.

4. Утром в луже плавало 19 синих и 95 красных амеб. Иногда они сливались: если сливаются две красные, то получается одна синяя амеба, если сливаются две синие, то получившаяся амеба тут же делится и в итоге образуются четыре красные амебы, наконец, если сливаются красная и синяя амеба, то это приводит к появлению трех красных амеб. Вечером в луже оказалось 100 амеб. Сколько среди них синих?

5. На доске написаны числа от 1 до 100. За один ход разрешается стереть два числа a и b и написать вместо них $ab + a + b$. В конце на доске останется одно число. Какое?

6. На доске записаны числа от 1 до 100. Разрешается стереть с нее любые два числа и записать вместо них их сумму, а на другой доске записать их произведение. Какова будет сумма чисел, написанных на второй доске, когда на первой доске останется всего одно число?

7. По кругу в вершинах правильного 100-угольника расставлено сто трехзначных чисел. Докажите, что существует диаметр, разность сумм чисел по разные стороны от которого не превосходит по модулю 900.

8. Узнику в тюрьме дано 100 монет, из которых половина — фальшивые, а половина — настоящие, причем внешне и по весу они не различимы. Каждое утро он раскладывает монеты на две кучки, и если оказывается, что в них поровну фальшивых или поровну настоящих, то он выходит на свободу. Докажите, что он может заведомо освободиться за 25 дней (то есть после не более чем 25 проверок).

Домашняя олимпиада. Серия 7.

1. Можно ли раскрасить ребра куба в два цвета так, чтобы по ребрам каждого цвета можно было пройти из любой вершины в любую другую?

2. Существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?

3. Пусть $S(n)$ — сумма цифр числа n, а $T(n)$ — сумма всех чисел, получаемых отбрасыванием у числа n одной, двух, и так далее цифр справа. Докажите, что $n = S(n) + 9T(n)$.

4. Докажите, что числа $2^{2^{50}} + 1$ и $2^{2^{100}} + 1$ взаимно простые.

5. Известно, что прямоугольник можно разрезать на несколько прямоугольников 2×3 и полоску 1×5. Докажите, что его можно разрезать на несколько полосок 1×6 и одну полоску 1×5.