Кружок в Хамовниках. 7 класс. 03.10.2015

Серия 5. Снова остатки.

0(Добиваем задачу из прошлой серии). По кругу стоят a детей. Дед Мороз ходит по кругу с мешком подарков. Сначала он даёт подарок одному из детей. Затем он отсчитывает b детей по часовой стрелке и даёт подарок ребёнку, на котором закончил счёт. (Скажем, если $b = 1$, то Дед Мороз даёт подарок следующему ребёнку, если $b = 2$, то пропускает одного.)

а) Докажите, что если у чисел a и b есть общий делитель, то всех детей Дед Мороз не обойдёт.

б) Докажите, что если Дед Мороз не обошёл всех детей, то он дошёл до первого ребёнка раньше, чем за a ходов.

в) Докажите, что если a и b взаимно простые, то раньше, чем через a ходов несколько полных оборотов сделать не получится. (Сведите это к тому, что lb должно делиться на a, если l – количество шагов до возвращения к первому ребёнку)

1. Докажите, что продавец и покупатель смогут рассчитаться за товар, который стоит целое число тугриков, если у каждого из них достаточно много купюр достоинством: а) в 171 тугрик и 173 тугрика; б) в 12 тугриков и 29 тугриков.

2. На доске написаны два различных числа a и b. Два игрока по очереди выписывают на доску положительную разность каких-то двух написанных чисел, если она ещё не встречалась до этого. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто победит и какие числа будут написаны в конце игры, если а) $a = 12, b = 29$; б) $a = 14, b = 47$; в) $a = 28, b = 1004$ г) (без этого пункта сдавать задачу не ходим) a и b произвольные натуральные числа?

3. Натуральные числа a, b взаимно простые. Докажите, что существуют такие целые m и n, что $ma + nb = 1$. Докажите, что если такие целые m и n существуют, то a и b взаимно простые.

4. Пусть a и b взаимно простые числа. Петя написал на доске некоторые натуральные числа c и d. Докажите, что Вася может подобрать такое натуральное число n, что $n - c$ делится на a, а $n - d$ делится на b.

5. Пусть a и b взаимно простые числа. Винни-Пух написал b натуральных чисел, дающих все остатки при делении на b по одному разу. После чего Пятачок умножил все написанные числа на a. Докажите, что полученные числа снова дают все остатки при делении на b по одному разу.

6. Натуральные числа a и b взаимно просты. По окружности длины а катится колесо длины b, в обод которого вбит гвоздь, оставляющий на окружности отметины. а) Докажите, что в какой-то момент новые отметины перестанут появляться. б) Докажите, что в этот момент отметины делят обод неподвижного колеса на равные части. в) Пусть c -— длина отрезка между двумя соседними отметинами. Докажите, что $c = 1$.

Непрерывная олимпиада — 5

1. Журнал “Юный диверсант” выходит нерегулярно — два или три раза в год. На обложке стоит номер журнала и год выпуска: 1-2001, 2-200. Докажите, что когда-то числа на обложке совпадут.

2. Петя произвольным образом разложил некоторое количество монет по 15 коробкам. Вася может выбрать любые k коробок и добавить в каждую из них по монете. При каких k Вася такими операциями сможет при любом исходном раскладе уравнять число монет во всех коробках?

3. Дано N синих и N красных точек на плоскости. Никакие три точки не лежат на одной прямой. Доказать, что можно разбить точки на разноцветные пары, чтобы отрезки, соединяющие точки из пар, не пересекались.

4. Магическим квадратом называется такая таблица 3×3, в которой суммы чисел в каждой строке, каждом столбце и каждой из двух диагоналей равны «магической сумме» S. Известно, что в двух противоположных углах магического квадрата стоят числа 31 и 33, а в еще одной из клеток стоит число 28. Чему может быть равна магическая сумма для такого квадрата? (Перечислите все возможные случаи и докажите, что других нет.)

5. Натуральные числа от 1 до 100, раскрасили в три цвета. Докажите, что найдутся два одноцветных числа, разность которых — точный квадрат.