

Серия 29. Повторение.

1. На фабрике несколько одинаковых поточных линий вместе выпускали в день 600 банок консервов. После реконструкции все поточные линии заменили на более производительные, а их количество увеличилось на 5. Фабрика стала выпускать 1400 банок в день. Сколько вначале было линий? Перечислите все варианты и докажите, что других нет. Подразумевается, что лента в день выпускает целое число банок.

2. Докажите, что для любых вещественных чисел a, b, c, d и e выполнено неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e).$$

3. Натуральное число n называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих собственных делителей. Верно ли, что любое натуральное число может быть делителем некоторого совершенного?

4. В графе между любыми двумя вершинами существует простой путь четной длины. Докажите, что между любыми двумя вершинами существует простой путь нечетной длины.

5. Найдите все простые p , для которых $p^3 + 2p^2 + 1$ — степень четвёрки.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle C = 120^\circ$, а $BC + CD = AB$. Докажите, что $AC = AD$.

7. У Миши есть весы, показывающие массу взвешиваемого предмета не совсем правильно — либо на один грамм больше настоящего значения, либо на один грамм меньше (каждый раз весы обязательно ошибаются, но неизвестно, в какую сторону). Можно взвешивать любое количество предметов любое количество раз. У Миши есть 100 предметов весом не менее 10 грамм каждый. Обязательно ли Игорь сможет определить массы своих предметов с помощью этих весов?

8. На плоскости отметили все вершины правильного n -угольника, а также его центр. Затем нарисовали контур этого n -угольника, и центр соединили со всеми вершинами; в итоге n -угольник разбился на n треугольников. Вася записал в каждую отмеченную точку по числу (среди чисел могут быть равные). В каждый треугольник разбиения он записал в произвольном порядке три числа, стоящих в его вершинах; после этого он стёр числа в отмеченных точках. При каких n по тройкам чисел, записанным в треугольниках, Петя всегда сможет восстановить число в каждой отмеченной точке?

9. Перед экстрасенсом кладут колоду из 36 карт рубашкой вверх. Он называет масть верхней карты, после чего карту открывают, показывают ему и откладывают в сторону. После этого экстрасенс называет масть следующей карты, и т. д. Задача экстрасенса — угадать масть как можно большего числа карт. Рубашки карт несимметричны, и экстрасенс видит в каком из двух положений лежит верхняя карта. Колода подготовлена подкупленным служащим. Служащий знает порядок карт в колоде и, хотя изменить его не может, зато может подсказать, располагая рубашки карт так или иначе согласно договоренности. Докажите, что экстрасенс с помощью такой подсказки может угадать масть не менее чем у 24 карт.