Серия 26. Графы.

Напоминание.
1) Деревом называется связный граф без циклов.
2) В дереве рёбер на одно меньше, чем вершин.
3) В любом связном графе можно удалить несколько рёбер, чтобы осталось дерево. Такое дерево называется остовным.
4) В связном графе на n вершинах не менее $n-1$ ребра.
5) Если в графе на n вершинах не менее n рёбер, то в нём обязательно есть цикл.

Определение. Граф называется *двудольным*, если его вершины можно разбить на две группы так, чтобы любые две вершины из одной группы не были соединены ребром.

1. Докажите, что из связного графа можно удалить вершину со всеми выходящими из неё рёбрами, чтобы связность не нарушилась.

2. *(Уже была, но мало кто решил)* В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трем авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из любого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

3. В графе 2016 вершин и 3000 рёбер. Какое наименьшее количество простых циклов может в нём быть? (Цикл называется простым, если не проходит дважды через одну и ту же вершину)

4. В связном графе 100 вершин и 200 рёбер. Докажите, что можно удалить все рёбра, образующий некоторый цикл так, чтобы граф остался связным.

5. Докажите, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда в нём нет циклов нечётной длины.

6. а) В футбольном турнире участвует 20 команд. После того, как все команды провели по две игры, организаторы турнира решили разбить их на три дивизиона, но так, чтобы в одном дивизионе не было команд, уже игравших друг с другом. Всегда ли они смогут это сделать?
б) Докажите, что если до этого команды дважды разбивались на 10 пар для того, чтобы сыграть эти две игры, то хватит и двух дивизионов.

7. За круглым столом сидят 100 представителей 50 стран, по двое от каждой страны. Докажите, что их можно разбить на две группы таким образом, что в каждой группе будет по одному представителю от каждой страны, и каждый человек находился в одной группе не более чем с одним своим соседом.

8. Рёбра графа покрашены в два цвета так, что не существует одноцветных нечётных циклов. Докажите, что вершины графа можно правильным образом покрасить в 4 цвета.

Непрерывная олимпиада

1. Можно ли в записи $1 * 2 * 3 * 4 * \ldots * 999 * 1000 * 1001$ заменить звездочки знаками "$+$" и "$-$" так, чтобы значение полученного выражения было равно 2009?

2. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на 6 тупоугольных треугольников с одинаковыми тупыми углами.

3. Про целые числа a, b, c, d, e и f известно, что

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{e}{f} = \frac{f}{a}.$$

Найдите все возможные значения выражения

$$\frac{a+b+c+d+e+f}{a+b+c+d+e-f}.$$

4. Узлы целочисленной решетки покрашены в 25 цветов и каждый цвет встречается хотя бы один раз. Всегда ли найдется прямоугольный треугольник (не обязательно по линиям сетки) все вершины которого покрашены в разные цвета?

5. Внутри треугольника ABC на биссектрисе угла B отметили точку M так, что $AM = AC$ и $\angle BCM = 30°$. Докажите, что $\angle BAM$ в два раза меньше, чем $\angle CAM$.