Серия 25. Неравенства

Пусть a и b - положительные числа. Число $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ называется их средним квадратическим, число $\frac{a+b}{2}$ - их средним арифметическим, число $\sqrt{ab}$ - их средним геометрическим, число $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ - их средним гармоническим.

1. a и b - положительные числа. Докажите основные неравенства о средних:

(a) среднее квадратическое a и b не меньше их среднего арифметического

(b) среднее арифметическое a и b не меньше их среднего геометрического

(c) среднее геометрическое a и b не меньше их среднего гармонического.

2. Докажите, что для любых неотрицательных чисел a, b и c выполнено неравенство $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$.

3. Докажите, что для любых положительных чисел a, b и c справедливо неравенство:

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b} \geq a+b+c$$

4. Пусть a, b и c - длины сторон треугольника. Докажите, что $a^2+b^2+c^2 \leq 2(ab+bc+ca)$.

5. Положительные числа a и b таковы, что $a \geq b$ и $a+b \leq 1$. Докажите, что $a^2+3b^2 \leq 1$.

6. a, b, c и d - действительные числа, такие что $a^2+b^2=c^2+d^2=1$. Докажите, что $|ac-bd| \leq 1$.

7. Для любых положительных x, y и z докажите неравенства:

(a) $x+\frac{1}{x} \geq 2$

(b) $(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) \geq 9$

8. Для любых положительных чисел a, b, x и y докажите неравенство:

$$(a\frac{x}{y}+b)^2+(a\frac{y}{x}+b)^2 \geq 2(a+b)^2$$

9. Неотрицательные числа a, b и c удовлетворяют условию $a+b+c \geq 3$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \geq 6$.

10. Докажите, что для любых положительных a, b, c справедливо неравенство:

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b$$

Непрерывная олимпиада — 25.

1. Собрались несколько рыцарей и лжецов, все разного роста (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). Каждый заявил: «Среди тех, кто выше меня, есть лжецы». Сколько лжецов могло быть среди них?

2. На плоскости проведено 100 прямых. Оказалось, что среди любых четырёх из них найдутся две параллельных. Докажите, что среди любых семи из них найдутся три параллельных.

3. Натуральные числа b и c и простое число a удовлетворяют соотношению $a^2+b^2=c^2$. Докажите, что $a<b$.

4. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. На сторонах AB и BC соответственно отмечены такие точки X и Y, что $AY=CX$ и $MY=MX$. Докажите, что $AB=BC$.

5. На столе лежат n двусторонних карточек, одна сторона которых черная, а другая — красная, изначально все карточки повернуты черной стороной вверх. За один ход можно выбрать несколько (может быть, одну) подряд идущих карт, самая левая из которых черная, а все остальные — красные и все их перевернуть. Какое наибольшее количество ходов можно сделать по таким правилам?