Серия 24. Теория чисел.

1. Решите в целых числах уравнение $x^2 - 3y^2 = 17$.

2. Сколько существует пар натуральных чисел таких, что их сумма, разность, произведение и частное в сумме дают 2016?

3. Назовём число *примечательным*, если оно делится на квадрат любого своего простого делителя. Докажите, что не бывает четырёх последовательных примечательных чисел.

4. Числа p, $2p+1$, $4p+1$ простые. Найдите эти числа.

5. Число n нечетно. Докажите, что $2^{n!} - 1$ делится на n.

6. Решите в натуральных числах уравнение $5^x - 3^y = 16$.

7. Пусть p — простое число. а) Докажите, что для любого a от 1 до $p-1$, существует ровно один обратный вычет. б) Докажите, что если $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$, то $x \equiv \pm 1 \pmod{p}$. в) **(Теорема Вильсона.)** Докажите, что $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. г) Докажите, что если для $m > 1$ имеет место сравнение $(m-1)! \equiv -1 \pmod{m}$, то m — простое.

8. Докажите, что существует бесконечно много таких пар различных натуральных чисел $k, n > 1$, что а) $(k!+1, n!+1) > 1$; б) $(k!-1, n!-1) > 1$.

Непрерывная олимпиада

1. На лужайке лежали вповалку дети. Когда старший преподаватель увидел это безобразие и пересчитал детей, то сказал, что он точно может выбрать из них либо 15 человек из какого-то одного отряда, либо 10 человек из разных отрядов. Известно, что старший преподаватель в лицо детей не знает, но никогда не ошибается. Какое наименьшее число детей могло валяться на линейке?

2. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка E, а на биссектрисе BD — точка F так, что EF параллельно AC и $AF = AD$. Докажите, что $AB = BE$.

3. Иван Андреевич выдал Мише Мрыхину пять различных палочек и попросил выбрать из них три так, чтобы составить из них прямоугольный треугольник. Оказалось, что Миша умеет делать это четырьмя различными способами. Найдите отношение длин самой длинной и самой короткой палочек.

4. На клетчатой доске размером 100×100 двое по очереди расставляют цифры: первый — единицы, второй — нули. После того, как вся доска заполняется, считают суммы цифр по столбцам и по строкам. Если хотя бы две из этих сумм нечетны, побеждает первый игрок, в противном случае —второй. Кто выиграет при правильной игре?

5. Натуральные числа m и n таковы, что $m^2 + n^2 + m$ делится на mn. Докажите, что m — квадрат натурального числа.