Серия 23. Разнобой.

1. Два пловца одновременно прыгнули с плывущего по реке плота и поплыли в разные стороны: первый – по течению, а второй – против течения. Через пять минут они развернулись и вскоре вновь оказались на плоту. Кто из них вернулся раньше? (Каждый из пловцов плывет с постоянной собственной (без учёта течения) скоростью, причём скорости пловцов могут быть не равны.)

2. Может ли сумма точного квадрата и точного куба быть точной пятой степенью?

3. Докажите, что если в числе 12008 между нулями вставить любое количество троек, то получится число, делящееся на 19.

4. Имеется 36 борцов. У каждого некоторый уровень силы, и более сильный всегда побеждает более слабого, а равные по силе сводят поединок вничью. Всегда ли этих борцов можно разбить на пары так, что все победители в парах будут не слабее, чем все те, кто сделал ничью или проиграл, а все сделавшие ничью будут не слабее всех тех, кто проиграл?

5. С написанными на доске положительными числами разрешается выполнить одну из двух следующих операций: 1) стереть произвольное число x и записать два раза число $\sqrt{x+1}-1$; 2) стереть два произвольных числа x и y и записать число $x+y+xy$. Изначально на доске написано число a. Через несколько операций на доске оказалось написано одно число. Докажите, что оно равно a.

6. Среди 100 монет есть 4 фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые – тоже, фальшивая монета легче настоящей. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти хотя бы одну настоящую монету?

7. Высота AK, биссектриса BL и медиана CM треугольника пересекаются в точке O, причем $AO = BO$. Докажите, что треугольник ABC – равносторонний.

8. Камни, сложенные в 100 куч, собрали и разложили в 199 куч. Докажите, что не менее ста камней оказались в меньших кучах, чем те, в которых они лежали раньше.

Непрерывная олимпиада

1. В куче 888 000 спичек. Два мудреца по очереди берут спички. В свой ход можно взять из кучи любое количество спичек, кроме того, которое было взято противником на предыдущем ходу (брать первым ходом все спички не разрешается). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что как бы хитро ни играл первый мудрец, второй мудрец сможет выиграть.

2. Из попарно различных ненулевых цифр T, P, E, C, K, A составили двузначные и трехзначные числа и оказалось что

$$\frac{TPE}{CKA} < \frac{PE}{KA} < \frac{E}{A}\,.$$

Докажите, что $A \cdot T < E \cdot C$.

3. Деревня рыцарей и лжецов на карте имеет вид клетчатого прямоугольника 2×10, в каждой клетке живет один человек — рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Соседними считаются клетки, примыкающие друг к другу по стороне или углу. Каждый житель сказал: *Среди моих соседей нечетное число лжецов*. Четно или нечетно количество лжецов в деревне?

4. Для любых трех различных элементов a, b, c бесконечного множества A натуральных чисел $(a, b) + (b, c) > (a, c)$. Докажите, что любые два разных элемента A имеют один и тот же наибольший общий делитель.

5. На кошачьем конкурсе красоты участниц оценивают по трем параметрам: усатости, хвостатости и кусатости. Из двух кошек более красивой считается та, которая превосходит другую по хотя бы двум из этих трех параметров (одинаковых значений не бывает). Было 25 участниц, и оказалось, что каждая из них красивее ровно 12 из оставшихся. Мурка была 8-й по усатости и 15-й по хвостатости. Которой она была по кусатости?