Серия 21. Упорядочивание.

1. Дано 2017 чисел. Известно, что сумма любых четырёх чисел положительна. Верно ли, что сумма всех чисел положительна?

2. Среди 25 жирафов, каждые два из которых различного роста, проводится конкурс «Кто выше?». За один раз на сцену выходят пять жирафов, а жюри справедливо (согласно росту) присуждает им места с первого по пятое. Каким образом надо организовать выходы жирафов, чтобы после семи выходов определить первого, второго и третьего призёров конкурса?

3. Даны 11 гирь разного веса (одинаковых нет), каждая весит целое число граммов. Известно, что как ни разложить гири (все или часть) на две чаши, чтобы гирь на них было не поровну, всегда перевесит чаша, на которой гирь больше. Докажите, что хотя бы одна из гирь весит более 35 граммов.

4. Наименьшее из n различных натуральных чисел равно a. Докажите, что их НОК не меньше na.

5. На прямой отмечено n точек. Докажите, что среди середин всевозможных отрезков с концами в этих точках не менее $2n-3$ различных точек.

6. В таблице 10×10 записаны числа от 1 до 100. В каждой строке выбирается третье по величине число. Докажите, что сумма этих чисел не меньше суммы чисел хотя бы в одной из строк.

7. На кольцевом треке $2N$ велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали с постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в одной точке, назовём это встречей. До полудня каждые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не встречались одновременно. Докажите, что до полудня у каждого велосипедиста было не менее N^2 встреч.

Непрерывная олимпиада

1. Докажите, что $1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+\ldots+k\cdot(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{5}$

2. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC выбрали точку D такую, что $BC=CD$. На катете BC выбрали такую точку E, что $DE=CE$. Докажите, что $AD+BE=DE$.

3. Некто расставил в произвольном порядке десятитомное собрание сочинений. Назовем «беспорядком» пару томов (не обязательно соседних), в которой том с большим номером стоит левее. Для некоторой расстановки томов подсчитано количество всех «беспорядков». Какие значения оно может принимать?

4. Докажите, что $2^{3^n}+1$ делится на 3^{n+1}, но не делится на 3^{n+2}.

5. В графе 200 вершин и степень каждой вершины не меньше 100. Докажите, что существует замкнутый путь, проходящий по всем вершинам по одному разу.