Серия 20. Дополнительные построения.

1. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, выходящим из одной вершины.

2. На медиане BM треугольника ABC взята точка P, такая, что $AP = BC$. Прямая AP пересекает отрезок BC в точке D. Докажите, что $BD = PD$.

3. В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB = AD + BC$ и биссектриса углла A проходит через середину M стороны CD. Докажите, что биссектриса угла B также проходит через точку M.

4. Докажите, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к середине гипотенузы, равна половине гипотенузы.

5. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки P и Q соответственно таким образом, что $\angle PAQ = 45^\circ$. Докажите, что $PQ = BP + DQ$.

6. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена биссектриса BB_1. Оказалось, что $BC = AB_1$. Докажите, что $BC = AB_1 = BB_1$.

7. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. Точка D на стороне BC такова, что $\angle BMA = \angle DMC$. Оказалось, что $CD + DM = BM$. Докажите, что $\angle ACB + \angle ABM = \angle BAC$.

8. На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M, а на продолжении стороны BC за вершину C отмечена точка N так, что $BM = MN$. Докажите, что $AM = CN$.

9. Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. На катетах AC и BC выбраны точки M и N соответственно так, что угол $\angle MKN$ — прямой. Докажите, что из отрезков AM, BN и MN можно составить прямоугольный треугольник.

Непрерывная олимпиада — 20.

1. Можно ли расставить по окружности числа от 1 до 100 таким образом, чтобы каждые два соседних отличались либо в 2 раза, либо на 2?

2. Сорок путешественников выехали из Москвы: двое 1 января, двое 2 января, ..., двое 20 января. Вернулись они в феврале: двое 1 февраля, двое 2 февраля, ..., двое 20 февраля. Все путешественники уезжали в полдень и приезжали тоже в полдень. Докажите, что какие-то двое потратили на путешествие поровну дней. (Двое путешественников, выехавшие в один день, могут вернуться в разные дни.)

3. Натуральное число назовем хорошим, если оно делится на двузначное число, образованное его первыми двумя цифрами. Например, число 1365 — хорошее, так как делится на 13. На доске выписано 98 последовательных восьмизначных чисел. Оказалось, что среди них нет ни одного хорошего. Какой может быть вторая цифра наибольшего из выписанных чисел? (Найдите все варианты ответа и докажите, что других нет.)

4. На некоторых клетках доски 10×10 стоят шашки. Клетка называется красивой, если на горизонтали, проходящей через эту клетку (включая саму клетку), стоит нечетное число шашек и на вертикали, проходящей через ту же клетку, тоже стоит нечетное число шашек. Может ли на доске оказаться ровно 42 красивые клетки?