Серия 18. Подсчёт двумя способами.

1. По кругу расставлено 2016 чисел. Оказалось, что сумма а) любых трёх; б) любых пяти подряд идущих чисел положительна. Докажите, что сумма всех чисел положительна.

2. В каждой клетке прямоугольной таблицы стоит число. Сумма чисел в каждом столбце равна 20, а в каждой строке — 10. Сколько в таблице столбцов, если строк 8?

3. В клетках шахматной доски расставили восемь единиц, восемь двоек, восемь троек и т.д.
а) Могло ли так оказаться, что в каждом квадрате 2×2 сумма чисел равна 19?
б) А может ли вообще сумма чисел во всех квадратах быть одинаковой?

4. На столе лежали две колоды, по 36 карт в каждой. Первую колоду перетасовали и положили на вторую. Затем для каждой карты первой колоды посчитали количество карт между ней и такой же картой второй колоды (т.е. сколько карт между семёрками червей, между дамами пик, и т.д.). Чему равна сумма 36 полученных чисел?

5. Можно ли занумеровать рёбра куба числами от 1 до 12 так, чтобы в каждой вершине сумма номеров входящих в нее рёбер была одна и та же?

6. В классе 20 детей. Каждый день какие-то пары из них при встрече пожимают друг другу руки, а какие-то нет. Известно, что всего за месяц было совершено 2014 рукопожатий. Докажите, что можно выделить группу из 7 человек так, чтобы между детьми из этой группы было совершено не менее 211 рукопожатий.

7. Во взводе 10 человек. В каждый из 100 дней какие-то четверо назначались дежур-ными. Докажите, что какие-то двое были вместе на дежурстве не менее 14 раз.

8. Может ли во время шахматной партии на каждой из 30 диагоналей оказаться нечетное число фигур?

9. Есть два ожерелья, в каждом ожерелье по 100 чёрных и 100 белых бусинок. Оксана хочет приложить второе ожерелье к первому (разрешается поворачивать и переворачи-вать) так, чтобы как можно больше бусинок совпало по цвету. Какое число совпадающих бусинок Оксана может гарантированно получить?

Непрерывная олимпиада

1. На стене замка висит несколько портретов. Шерлок Холмс выяснил, что среди людей на этих портретах ровно десятеро являются дедами, ровно десятеро — внуками других людей на этих портретах. Какое наименьшее количество портретов могло висеть на стене?

2. Найдите все тройки простых чисел, для которых все три их положительные попарные разности также простые.

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Через точку A проведена прямая, перпендикулярная BL, она пересекла отрезок BC в точке D. На луче BA за точкой A отмечена такая точка E, что $AE = CD$. Докажите, что $EF = EC$.

4. Назовем число *хорошим*, если его можно представить в виде $\frac{a}{2} + \frac{b}{5}$, где a и b — целые числа от 0 до 100. Найдите сумму хороших чисел.

5. Пусть n — нечетное число, большее 10. Каждая клетка таблицы $n \times n$ покрашена в красный или белый цвет. Назовём клетки *соседними*, если у них ровно одна общая вершина. При каких n в таблице найдётся или клетка, с четырьмя соседними, среди которых поровну красных и белых, или клетка, у которой ровно две соседних, причём они одного цвета?