Серия 16. Принцип крайнего.

Обратите внимание на объекты «с краю», где край понимается геометрически (граница, вершина, угол) или арифметически (наибольшее, наименьшее). Можно рассматривать и несколько крайних объектов. Так, для получения оценки бывает полезным выбрать два крайних объекта: для разностей — наибольший и наименьший, для расстояний — наиболее удаленные друг от друга.

1. В каждой клетке шахматной доски записано число, причем каждое число является средним арифметическим его соседей по стороне. Докажите, что все числа равны.

2. а) Можно ли записать числа $1, 2, \ldots, 99$ в строчку так, чтобы любые два соседних числа отличались не менее чем на 50? б) Можно ли записать числа $1, 2, \ldots, 100$ в строчку так, чтобы любые два соседних числа отличались не менее чем на 50?

3. Двадцать пять семиклассников бегают по футбольному полю с шишкой в руке. По свистку они останавливаются, и каждый кидает шишкой в ближайшего к нему семиклассника (все расстояния между ребятами различны). а) Докажите, что какие то два кинут шишки друг в друга. б) Докажите, что в какого-то семиклассника ни одна шишка не полетит.

4. На полях шахматной доски расставлены числа $1, 2, \ldots, 64$. Докажите, что найдется пара соседних по стороне клеток, где числа отличаются не меньше, чем на 5.

5. На доске выписано 100 различных чисел. Докажите, что среди них можно выбрать пять чисел так, что их среднее арифметическое не будет равно среднему арифметическому никаких шести из выписанных чисел.

6. Солдаты выстроены в две шеренги по n человек, так что каждый солдат из первой шеренги не выше стоящего за ним солдата из второй шеренги. В шеренгах солдат выстроили по росту. Докажите, что после этого каждый солдат из первой шеренги также будет не выше стоящего за ним солдата из второй шеренги.

7. Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причём никакие двое не собрали одинакового числа грибов. Докажите, что есть трое грибников, которые собрали вместе не менее 50 грибов.

8. На прямой имеется $2n + 1$ отрезок. Любой отрезок пересекается по крайней мере с n другими. Докажите, что существует отрезок, пересекающийся со всеми остальными.

Непрерывная олимпиада — 16.

1. Может ли десятичная запись степени двойки оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами?

2. Шахматная доска разбита на двуклеточные прямоугольники-домино. Докажите, что найдется пара домино, образующая квадрат из 4 клеток.

3. На столе стоит 9 пустых корзин. Каждую минуту Вася выбирает любые 5 из них и кладёт в них по яблоку. Через некоторое время во всех корзинах оказалось различное число яблок. Какое наименьшее число яблок может быть во всех корзинах в сумме в этот момент?

4. Полоска 1×10 разбита на единичные квадраты. В квадраты записывают числа $1, 2, \ldots, 10$. Сначала в один какой-нибудь квадрат пишут число 1, затем число 2 записывают в один из соседних квадратов, затем число 3 — в один из соседних с уже занятыми и т.д. (произвольными являются выбор первого квадрата и выбор соседа на каждом шагу). Сколькими способами это можно проделать?