Серия 15. Разнобой. Про индукцию и не только.

1. Существуют ли такие натуральные числа m, n, что $19m^3 - 84n^2 = 1984$?

2. Таблица 10×10 заполняется по правилам игры “Сапёр”: в некоторые клетки ставят по мине, а в каждую из остальных клеток записывают количество мин в клетках, соседних с данной клеткой (по стороне или вершине). Может ли увеличиться сумма всех чисел в таблице, если все "старые"мины убрать, во все ранее свободные от мин клетки поставить мины, после чего заново записать числа по правилам?

3. На доске написаны числа 1, 2, ..., 2016. Разрешается заменять любое число на произведение его цифр или любые два числа на их сумму. Можно ли такими заменами добиться, чтобы среди чисел на доске появилось 3 000 000?

4. Сумма цифр числа n равна 3. Чему может быть равна сумма цифр числа n^3?

5. Число a таково, что число $a + \frac{1}{a}$ целое. Докажите, что число $a^n + \frac{1}{a^n}$ целое для любого натурального n.

6. На отрезке отмечено n точек. Докажите, что для любого k можно поставить на этом отрезке еще k точек так, чтобы из $n + k + 1$ отрезков разбиения $k + 1$ были одинаковой длины, а остальные были не большей длины (допускаются отрезки нулевой длины).

7. В стране $2n$ городов. Некоторые из них соединены дорогами. Известно, что из любого города можно добраться до любого другого. Докажите, что можно разбить города на несколько областей так, чтобы граф дорог внутри каждой области был деревом с более чем одной вершиной.

8. Назовём лестницей высоты n фигуру, состоящую из всех клеток квадрата $n \times n$, лежащих не выше диагонали. Сколькими различными способами можно разбить лестницу высоты n на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?

Непрерывная олимпиада.

1. Докажите, что для любых действительных чисел x, y, z выполнено неравенство $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + xz + yz$?

2. Петя приехал летом на дачу к своему дедушке. Дедушка начал показывать Пете свой сад и сказал: “У меня в саду груши и яблони, причём на расстоянии 10 метров от каждой яблони ровно две груши”. “Значит, груш вдвое больше, чем яблонь” – заключил Петя. “Наоборот вдвое меньше” – удивил Петю дедушка. Нарисуйте, как такое могло быть.

3. Можно ли при каком-то натуральном k разбить все натуральные числа от 1 до k на две группы и выписать числа в каждой группе подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа?

4. В классе 20 детей. Каждый день какие-то пары из них при встрече пожимают друг другу руки, а какие-то нет. Известно, что всего за месяц было совершено 2014 рукопожатий. Докажите, что можно выделить группу из 7 человек так, чтобы между детьми из этой группы было совершено не менее 211 рукопожатий.

5. Натуральные числа от 1 до 100 раскрасили в три цвета. Докажите, что найдутся два одноцветных числа, разность которых – точный квадрат.