Серия 14. Индукция.

Немного о постепенном конструировании, если кто забыл.

1. Можно ли разрезать разрезать квадрат на а) 6; б) 7; в) $n > 5$ квадратов (не обязательно различных)?

2. Можно ли подобрать а) 3; б) 4 в) 50 различных дробей с числителем 1, чтобы их сумма была 1?

3. В компании из n человек ($n \geqslant 4$) каждый узнал по новости. Созвонившись, двое рассказывают друг другу все известные им новости. Как за $2n-4$ звонка все смогут узнать все новости?

4. Можно ли отметить на плоскости несколько точек так, чтобы на расстоянии 1 от каждой отмеченной точки находилось ровно 10 отмеченных?

5. Докажите, что для любого натурального n существует арифметическая прогрессия длины n такая, что любой её член является точной степенью (выше первой) некоторого натурального числа.

Доказательство по индукции.

6. Докажите следующие равенства:
а) $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.
б) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$.
в) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^k}$.
г) $1+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots n\cdot n!=(n+1)!-1$.
д) $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

7. *В этой задаче нельзя пользоваться основной теоремой арифметики, потому что цель этой задачи её доказать. Можно использовать только такой факт: если произведение двух чисел делится на простое число p, то одно из этих чисел на него делится.* а) Докажите, что у любого натурального числа, большего 1 есть простой делитель.
б) Докажите, что любое натуральное, большее 1 число можно представить в виде произведения своих простых делителей.
в) Докажите, что если произведение n натуральных чисел делится на простое число p, то один из множителей делится на p.
г) Докажите, что представление, описанное в пункте б) единственное с точностью до порядка сомножителей.

8. Докажите, что если в выпуклом многоугольнике проведены несколько непересекающихся диагоналей, то по каждую сторону от любой из них найдется вершина, из которой не выходит ни одной диагонали.

9. На ежегодный слет-проверку съехались 100 бригад СЭС и поселились в 100 корпусах. Каждая бригада хочет проверить три корпуса (заранее сообщая номера начальнику лагеря) и тут же уехать из лагеря. Докажите, что начальник может составить расписание проверок так, чтобы никакую бригаду не проверяли более трех раз (проверять пустые корпуса можно сколько угодно раз).

10. В турнире по теннису приняло участие n теннисистов. Каждый сыграл с каждым одну партию. Докажите, что всех спортсменов можно выстроить в ряд так, чтобы каждый выиграл у следующего за ним.

11. В стране $n \geqslant 3$ городов. Между любыми двумя из них проведена дорога с односторонним движением. Оказалось, что из любого города можно доехать до любого другого. Докажите, что можно построить маршрут, проходящий по всем городам один раз, и возвращающийся в начальный город.

12. Фред выписал в строку числа 1, 2, ..., n в некотором порядке. Затем он составил список всех пар (i, j), $1 \leq i < j \leq n$, для которых число, стоящее в этой строке на i-м месте, больше числа, стоящего на j-м месте. После этого Фред повторяет следующую операцию: он выбирает из списка пару (i, j), меняет местами числа, стоящие в строке на i-м и j-м местах, после чего вычеркивает пару (i, j) из списка. Процесс заканчивается, когда в списке не останется ни одной пары. Докажите, что Фред может выбирать пары в таком порядке, чтобы в итоге числа в строке оказались расположенными в порядке возрастания.

Непрерывная олимпиада.

1. Лёня и Паша шагают по движущемуся вниз эскалатору, не пропуская ступенек. Паша успевает сделать три шага, пока Лёня делает два. Паша, пока спускался, успел сделать 45 шагов, а Лёня, пока спускался, успел сделать только 40 шагов. Сколько ступенек в видимой части эскалатора?

2. Найдите все такие десятизначные числа, первая цифра которого была бы равна числу единиц в записи числа, вторая цифра равна числу двоек, третья цифра —- числу троек, и так далее. Девятая цифра должна быть равна числу девяток, а десятая числу нулей.

3. Докажите, что для любых положительных чисел x, y выполнено неравенство: $\frac{4x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 4$.

4. Какой остаток даёт число 7^{51} при делении на 103?

5. Дан клетчатый квадрат со стороной 25. За один ход Вася может выбрать произвольный квадрат со сторонами, идущими по линиям сетки, и покрасить его границу в красный цвет. Какое наименьшее количество ходов ему понадобится, чтобы покрасить в красный цвет все линии сетки как внутри, так и на границе большого квадрата?