Серия 12. Ещё разнобой.

1. Дано простое число p. Назовём остаток a при делении на p *обрантым* к остатку b, если их $ab-1$ делится на p.
а) Докажите, что у каждого остатка есть обратный.
б) Какие остатки обратны сами себе?
в) Разбив почти все остатки от 1 до $p-1$ на пары обратных, докажите, что $(p-1)!+1$ делится на p. (Этот фатк называется *теоремой Вильсона*)

2. На какое количество нулей может заканчиваться выражение $1^n+2^n+3^n+4^n$?

3. В некоторых клетках квадратной таблицы 50×50 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.

4. В стране Конкуренции 2010 городов, некоторые из которых соединены прямыми авиарейсами (в обе стороны). Докажите, что можно распределить эти рейсы между 1005 авиакомпаниями так, чтобы ни одна авиакомпания не могла предоставить своим пассажирам кольцевой маршрут более чем по двум городам.

5. Существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?

6. Докажите, что для любого натурального n выполнено: $n^{561}\equiv n \pmod{561}$;

7. Каждая сторона правильного треугольника поделена на 15 равных частей и через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. В результате этого получили разбиение треугольника на маленькие треугольнички. После этого в каждый из маленьких треугольничков записали $+1$ или -1. Известно, что число в каждом треугольничке равно произведению чисел в тех треугольничках, которые имеют с ним общую сторону. Докажите, что в каждом из маленьких треугольничков, прилегающих к серединам сторон большого треугольника, стоит число $+1$.

8. Половина вершин правильного 2000-угольника покрашены красным цветом, а половина — синим. Докажите, что можно найти два равных треугольника: один с красными вершинами, а другой — с синими.

Старое.

Серия 10. Сравнения.

Определение. Будем говорить что натуральные числа a и b сравнимы по модулю m и писать $a\equiv b \pmod m$, если $(a-b)$ делится на m. Сама запись $a\equiv b \pmod m$ называется сравнением.

Справедливы следующие свойства сравнений:

1. $a\equiv a \pmod m$;
2. если $a\equiv b \pmod m$, то $b\equiv a \pmod m$;
3. если $a\equiv b \pmod m$и $b\equiv c \pmod m$, то $a\equiv c \pmod m$;
4. если $a\equiv b \pmod m$ и $c\equiv d \pmod m$, то $a+c\equiv b+d \pmod m$;
5. если $a\equiv b \pmod m$ то $ac\equiv bc \pmod m$;
6. если $a\equiv b \pmod m$ и $c\equiv d \pmod m$, то $ac\equiv bd \pmod m$;
7. если $a\equiv b \pmod m$ то $a^n\equiv b^n \pmod m$;
8. если $ka\equiv kb \pmod m$ и НОД$(k,m)=1$, то $a\equiv b \pmod m$.

1. Найдите остаток от деления $3^{100}+4^{100}$ а) на 7; б) на 13.

2. Докажите, что $36^{36}+41^{41}$ делится на 77.

3. Докажите, что при нечетных m и n число $1^n+2^n+\dots+(m-1)^n$ делится на m.

4. Известно, что $a+5c$ и $b+4d$ делятся на 13. Докажите, что $ab-20cd$ делится на 13.

5. Докажите, что при любом натуральном n число $3^{6n}-2^{6n}$ делится на 35.

6. Число p — простое, $2^p+3^p=a^n$. Докажите, что $n=1$.

7. (a) Дано натуральное число n. Для каких натуральных k среди чисел $0\cdot k, 1\cdot k, 2\cdot k, \dots, (n-1)\cdot k$ встречаются все остатки при делении на n? (b) Докажите, что для взаимно простых чисел m и n найдется такое число x, что $mx\equiv 1 \pmod n$.(c) Докажите, что для двух натуральных чисел m и n и их наибольншего общего делителя d существуют целые числа x и y такие, что $mx+ny=d$.

8. Докажите *теорему Ферма*: для простого p и натурального a, не кратного p, выполнено $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$.

9. Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр (0 ставить на первое место нельзя) можно получить другую степень двойки?

10. Числа $a_1,\dots,a_n$ дают все остатки при делении на n. Числа $b_1,\dots,b_n$ тоже дают все остатки при делении на n. При каких n может получиться так, что числа $a_1+b_1,\dots,a_n+b_n$ дают все остатки при делении на n?

Непрерывная олимпиада — 10.

1.Леша распилил полено на 8 кусков. Потом некоторые из полученных кусков вновь распилил на 8 кусков и т.д. Могло ли в результате получиться 1135 кусков? 1136?

2. Алёша и Яша нашли на улице полный граф с 2009 вершинами и по очереди выламывают из него рёбра. Проигрывает тот, после чьего хода граф станет несвязным. Кто выиграет при правильной игре?

3. Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого пятиугольника больше периметра, но меньше удвоенного периметра.

4. На доске в строчку выписано несколько чисел. Разрешается любое число заменить на сумму чисел, выписанных слева от него. Докажите, что на каком-то шаге обязательно будет выписана такая последовательность, которая уже не сможет быть изменена.

5. Шахматная фигура "носорог"может ходить на две клетки вверх, на одну клетку вверх и вправо, на одну клетку вниз и влево, на две клетки вниз. Может ли носорог совершить 2015 ходов и вернуться в исходное положение?

Серия 11. Разнобой.

1. В стране пять городов. Каждые два города соединены друг с другом либо красной, либо синей дорогой так, что никакие три дороги не образуют треугольник одного цвета с вершинами в городах. Докажите, что, находясь в любом городе, можно как по красным, так и по синим дорогам, обойти все города и вернуться обратно, не проходя два раза по одной и той же дороге.

2. Математические хулиганы Гриша и Вова катаются на лифте 17-этажного дома. Они садятся в лифт на этаже с номером n, возводят в квадрат номер этажа, на котором находятся, и едут на этаж с номером, равным остатку от деления результата на 17. Какое максимальное количество поездок удастся им совершить таким способом?

3. К автомату с газировкой стояла очередь из 100 гномов. Газировка бывает двух сортов: с сиропом – за 3 копейки и без сиропа – за 1 копейку. Самый первый гном купил газировку с сиропом. Второй – без сиропа. Верно ли, что в некоторый момент гномов, уже купивших газировку с сиропом было столько же, сколько гномов, собиравшихся купить газировку без сиропа?

4. Двое сладкоежек хотят разделить поровну 2015 килограмм халвы. Проблема в том, что халва им досталась разломленная на 2015 различных кусочков. Какое наименьшее число кусков надо будет разрезать, чтобы можно было провести дележку?

5. На столе лежит несколько правильно идущих часов (циферблатами вверх; возможно, разного размера). Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов всех минутных будет не меньше, чем сумма расстояний от центра стола до центров часов.

6. В дереве степени всех вершин нечётные. Докажите, что более половины его вершин – висячие.

7. Есть 11 целых чисел. Докажите, что можно таким способом домножить каждое из них на коэффициент 0, -1, 1 и сложить, чтобы сумма делилась бы на 2015 (при этом хотя бы один коэффициент должен быть отличен от нуля).

8. На плоскости дано 1000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести 500 отрезков с вершинами в этих точках так, что никакие два отрезка не пересекаются (вершины тоже не совпадают).

Непрерывная олимпиада — 11.

1. Есть 3 бактерии. Любая бактерия может делиться на четыре бактерии, может на две, а может и не делиться. В результате делений образовалось 102 бактерии. Определите число делений, если известно, что число бактерий разделившихся на две в 6 раз больше, чем число бактерий разделившихся на 4.

2. Существует ли граф, два остовных дерева которого не имеют общих ребер?

3. На шахматной доске в некоторых клетках сидит 33 жука, изначально в каждой клетке не более одного. Каждую секунду жуки переползают в понравившуюся им соседнюю по стороне клетку. Может ли так оказаться, что в некоторый момент времени они все очутились в одной клетке?

4. По краю круглого торта с одинаковыми промежутками выложены красные и белые мармеладинки. Известно, что красных мармеладинок столько же, сколько и белых. Докажите, что торт можно разрезать пополам так, чтобы в каждой половине красных и белых мармеладинок было поровну.

5. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, внутри которого содержится отрезок. Докажите, что его длина меньше чем длина самой длинной стороны или диагонали четырёхугольника.