Кружок в Хамовниках. 7 класс. 05.12.2015

Серия 11. Разнобой.

1. В стране пять городов. Каждые два города соединены друг с другом либо красной, либо синей дорогой так, что никакие три дороги не образуют треугольник одного цвета с вершинами в городах. Докажите, что, находясь в любом городе, можно как по красным, так и по синим дорогам, обойти все города и вернуться обратно, не проходя два раза по одной и той же дороге.

2. Математические хулиганы Гриша и Вова катаются на лифте 17-этажного дома. Они садятся в лифт на этаже с номером n, возводят в квадрат номер этажа, на котором находятся, и едут на этаж с номером, равным остатку от деления результата на 17. Какое максимальное количество поездок удастся им совершить таким способом?

3. К автомату с газировкой стояла очередь из 100 гномов. Газировка бывает двух сортов: с сиропом – за 3 копейки и без сиропа – за 1 копейку. Самый первый гном купил газировку с сиропом. Второй – без сиропа. Верно ли, что в некоторый момент гномов, уже купивших газировку с сиропом было столько же, сколько гномов, собиравшихся купить газировку без сиропа?

4. Двое сладкоежек хотят разделить поровну 2015 килограмм халвы. Проблема в том, что халва им досталась разломленная на 2015 различных кусочков. Какое наименьшее число кусков надо будет разрезать, чтобы можно было провести дележку?

5. На столе лежит несколько правильно идущих часов (циферблатами вверх; возможно, разного размера). Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов всех минутных будет не меньше, чем сумма расстояний от центра стола до центров часов.

6. В дереве степени всех вершин нечётные. Докажите, что более половины его вершин – висячие.

7. Есть 11 целых чисел. Докажите, что можно таким способом домножить каждое из них на коэффициент 0, -1, 1 и сложить, чтобы сумма делилась бы на 2015 (при этом хотя бы один коэффициент должен быть отличен от нуля).

8. На плоскости дано 1000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести 500 отрезков с вершинами в этих точках так, что никакие два отрезка не пересекаются (вершины тоже не совпадают).

Кружок в Хамовниках. 7 класс. 05.12.2015

Непрерывная олимпиада — 11.

1. Есть 3 бактерии. Любая бактерия может делиться на четыре бактерии, может на две, а может и не делиться. В результате делений образовалось 102 бактерии. Определите число делений, если известно, что число бактерий разделившихся на две в 6 раз больше, чем число бактерий разделившихся на 4.

2. Существует ли граф, два остовных дерева которого не имеют общих ребер?

3. На шахматной доске в некоторых клетках сидит 33 жука, изначально в каждой клетке не более одного. Каждую секунду жуки переползают в понравившуюся им соседнюю по стороне клетку. Может ли так оказаться, что в некоторый момент времени они все очутились в одной клетке?

4. По краю круглого торта с одинаковыми промежутками выложены красные и белые мармеладинки. Известно, что красных мармеладинок столько же, сколько и белых. Докажите, что торт можно разрезать пополам так, чтобы в каждой половине красных и белых мармеладинок было поровну.

5. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, внутри которого содержится отрезок. Докажите, что его длина меньше чем длина самой длинной стороны или диагонали четырёхугольника.