*Кружок в Хамовниках. 7 класс. 28.11.2015*

# Серия 10. Сравнения.

**Определение.** Будем говорить что натуральные числа $a$ и $b$ сравнимы по модулю $m$ и писать $a \equiv b \pmod m$, если $(a-b)$ делится на $m$. Сама запись $a \equiv b \pmod m$ называется сравнением.

Справедливы следующие свойства сравнений:

1. $a \equiv a \pmod m$;
2. если $a \equiv b \pmod m$, то $b \equiv a \pmod m$;
3. если $a \equiv b \pmod m$и $b \equiv c \pmod m$, то $a \equiv c \pmod m$;
4. если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то $a+c \equiv b+d \pmod m$;
5. если $a \equiv b \pmod m$ то $ac \equiv bc \pmod m$;
6. если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то $ac \equiv bd \pmod m$;
7. если $a \equiv b \pmod m$ то $a^n \equiv b^n \pmod m$;
8. если $ka \equiv kb \pmod m$ и НОД$(k,m)=1$, то $a \equiv b \pmod m$.

**1.** Найдите остаток от деления $3^{100}+4^{100}$ а) на 7; б) на 13.

**2.** Докажите, что $36^{36}+41^{41}$ делится на 77.

**3.** Докажите, что при нечетных $m$ и $n$ число $1^n+2^n+\dots+(m-1)^n$ делится на $m$.

**4.** Известно, что $a+5c$ и $b+4d$ делятся на 13. Докажите, что $ab-20cd$ делится на 13.

**5.** Докажите, что при любом натуральном $n$ число $3^{6n}-2^{6n}$ делится на 35.

**6.** Число $p$ — простое, $2^p+3^p=a^n$. Докажите, что $n=1$.

**7.** (a) Дано натуральное число $n$. Для каких натуральных $k$ среди чисел $0\cdot k, 1\cdot k, 2\cdot k, \dots, (n-1)\cdot k$ встречаются все остатки при делении на $n$? (b) Докажите, что для взаимно простых чисел $m$ и $n$ найдется такое число $x$, что $mx \equiv 1 \pmod n$.(c) Докажите, что для двух натуральных чисел $m$ и $n$ и их наибольншего общего делителя $d$ существуют целые числа $x$ и $y$ такие, что $mx+ny=d$.

**8.** Докажите *теорему Ферма*: для простого $p$ и натурального $a$, не кратного $p$, выполнено $a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$.

**9.** Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр (0 ставить на первое место нельзя) можно получить другую степень двойки?

**10.** Числа $a_1, \dots, a_n$ дают все остатки при делении на $n$. Числа $b_1, \dots, b_n$ тоже дают все остатки при делении на $n$. При каких $n$ может получиться так, что числа $a_1+b_1, \dots, a_n+b_n$ дают все остатки при делении на $n$?

*Кружок в Хамовниках. 7 класс. 28.11.2015*

# Непрерывная олимпиада — 10.

**1.**Леша распилил полено на 8 кусков. Потом некоторые из полученных кусков вновь распилил на 8 кусков и т.д. Могло ли в результате получиться 1135 кусков? 1136?

**2.** Алёша и Яша нашли на улице полный граф с 2009 вершинами и по очереди выламывают из него рёбра. Проигрывает тот, после чьего хода граф станет несвязным. Кто выиграет при правильной игре?

**3.** Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого пятиугольника больше периметра, но меньше удвоенного периметра.

**4.** На доске в строчку выписано несколько чисел. Разрешается любое число заменить на сумму чисел, выписанных слева от него. Докажите, что на каком-то шаге обязательно будет выписана такая последовательность, которая уже не сможет быть изменена.

**5.** Шахматная фигура "носорог"может ходить на две клетки вверх, на одну клетку вверх и вправо, на одну клетку вниз и влево, на две клетки вниз. Может ли носорог совершить 2015 ходов и вернуться в исходное положение?