

Кружок в Хамовниках. 7 класс. 24.10.2015
Серия 6. Деревья и связность.

Граф называется *связным*, если из любой его вершины можно попасть в любую другую, двигаясь по ребрам графа.

Цикл в графе — замкнутый путь, не проходящий дважды через одну и ту же вершину.

Дерево — связный граф без циклов.

Висячая вершина графа — это вершина степени 1.

1. Докажите, что

(1) в дереве есть висячая вершина;

(2) в дереве с n вершинами ровно $n - 1$ ребро.

(3) если в связном графе n вершин и $n - 1$ ребро, то он — дерево.

2. Докажите, что в любом связном графе можно удалить несколько ребер так, чтобы полученный граф стал деревом (такое дерево называется *остовным* для исходного графа).

3. С любой станции метро можно добраться до любой другой не поднимаясь на поверхность. Докажите, что можно закрыть какую-то одну станцию без права проезда через нее так, чтобы и после этого можно было бы добраться с любой станции на любую другую.

4. Каждая грань кубика разбита на 4 квадрата. Некоторые стороны этих квадратов раскрасили в красный цвет — всего 26 сторон. Докажите, что на поверхности кубика найдется замкнутая ломаная из красных отрезков.

5. В стране 101 город и из каждого города ведет не менее 50 дорог. Докажите, что из любого города можно добраться в любой другой (возможно с пересадками).

6. Рёбра графа, степени всех вершин которого равны 5, раскрасили в три цвета так, что по рёбрам каждого цвета можно от любой вершины дойти до любой другой. Каким могло быть число вершин этого графа?

7. В стране n городов, некоторые пары из которых соединены дорогами. Известно, что из любого города можно добраться до любого другого, причем единственным способом (если не проезжать по одной дороге более одного раза). Докажите, что министр может объявить не более чем $\frac{n}{14}$ городов закрытыми (и запретить въезд в них и выезд из них) так, чтобы после этого для любой пары городов X, Y либо не существует пути между ними, либо можно добраться из X до Y , проехав не более чем по 24 дорогам.

8. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трем авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из любого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

9. Докажите, что связных графов на 2015 вершинах больше, чем несвязных.