11 класс **Теорема Форда-Фалкерсона** 21 марта 2016

Определение 1. Пусть задано множество вершин V, в котором выделены две вершины $\mathbf{s}$ (*вход*) и $\mathbf{t}$ (*выход*). Пусть определена функция $c : V \times V \to R$, удовлетворяющая соотношениям

$$c(x, y) \geqslant 0,\ c(x, s) = c(t, y) = 0$$

для любых вершин $x, y \in V$. Тогда $G(V, s, t, c)$ – *сеть*, функция c называется *пропускной способностью* сети G.

Определение 2. Пусть G – сеть, а функция f удовлетворяет трем условиям:

1. $f(x, y) < c(x, y)$;
2. $f(x, y) = -f(y, x)$;
3. Для любой $v \in V$, $v \neq s, t$, выполняется условие $\sum_{x \in V} f(v, x) = 0$.

Тогда f – поток в сети G. Число $|f| = \sum_{x \in V} f(s, x)$ называется *величиной потока*. Поток сети G с максимальной величиной называется *максимальным*.

Определение 3. Пусть G – сеть, а множество ее вешин разбито на два непересекающихся множества $S \ni s$ и $T \ni t$. Пара (S, T) называется *разрезом* сети G.

Определение 4. Величина $c(S, T) = \sum_{x \in S, y \in T} c(x, y)$ называется *пропускной способностью разреза*, а $f(S, T) = \sum_{x \in S, y \in T} f(x, y)$ называется *потоком* через разрез (S, T). Разрез сети G с минимальной пропускной способностью называется *минимальным*.

Определение 5. Пусть f – поток в сети G. Рассмотрим сеть G_f с теми же вершинами и пропускной способностью $c_f(x, y) = c(x, y) - f(x, y)$. Назовем G_f *остаточной сетью* потока f.

Определение 6. Проведем на множестве вершин V ориентированные ребра из x в y для всех пар (x, y), что $c_f(x, y) > 0$. Любой путь из s в t в полученном ориентированном графе называется *дополняющим путем* потока f.

1. Для любого потока f и разреза (S, T) сети G докажите, что $|f| = f(S, T)$.

2. Пусть поток f максимален. Тогда в остаточной сети G_f нет дополняющего пути.

3. Пусть в остаточной сети G_f нет дополняющего пути. Тогда существует разрез (S, T) такой, что $|f| = c(S, T)$.

4. Теорема Форда-Фалкерсона. В сети G с пропускной способностью c задан поток f. Докажите, что следующие утверждения равносильны:

1. Поток f максимален.
2. Существует разрез (S, T) такой, что $|f| = c(S, T)$.
3. В остаточной сети G_f нет дополняющего пути.

Следствие. Величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза.

5. Докажите, что в целочисленной цепи существует максимальный целочисленный поток.

6. Докажите, что если в сети, где все пропускные способности ребер равны 1, существует целочисленный поток величиной n, то существует и n реберно непересекающихся путей.

7. Теорема Менгера. В ориентированном графе между вершинами u и v существует n реберно непересекающихся путей тогда и только тогда, когда после удаления любых $n - 1$ ребер, существует путь из u в v.

11 класс	Теорема Форда-Фалкерсона	21 марта 2016

Определение 1. Пусть задано множество вершин V, в котором выделены две вершины $\mathbf{s}$ (*вход*) и $\mathbf{t}$ (*выход*). Пусть определена функция $c : V \times V \to R$, удовлетворяющая соотношениям

$$c(x, y) \geqslant 0,\ c(x, s) = c(t, y) = 0$$

для любых вершин $x, y \in V$. Тогда $G(V, s, t, c)$ – *сеть*, функция c называется *пропускной способностью* сети G.

Определение 2. Пусть G – сеть, а функция f удовлетворяет трем условиям:

1. $f(x, y) < c(x, y)$;
2. $f(x, y) = -f(y, x)$;
3. Для любой $v \in V$, $v \neq s, t$, выполняется условие $\sum_{x \in V} f(v, x) = 0$.

Тогда f – поток в сети G. Число $|f| = \sum_{x \in V} f(s, x)$ называется *величиной потока*. Поток сети G с максимальной величиной называется *максимальным*.

Определение 3. Пусть G – сеть, а множество ее вешин разбито на два непересекающихся множества $S \ni s$ и $T \ni t$. Пара (S, T) называется *разрезом* сети G.

Определение 4. Величина $c(S, T) = \sum_{x \in S, y \in T} c(x, y)$ называется *пропускной способностью разреза*, а $f(S, T) = \sum_{x \in S, y \in T} f(x, y)$ называется *потоком* через разрез (S, T). Разрез сети G с минимальной пропускной способностью называется *минимальным*.

Определение 5. Пусть f – поток в сети G. Рассмотрим сеть G_f с теми же вершинами и пропускной способностью $c_f(x, y) = c(x, y) - f(x, y)$. Назовем G_f *остаточной сетью* потока f.

Определение 6. Проведем на множестве вершин V ориентированные ребра из x в y для всех пар (x, y), что $c_f(x, y) > 0$. Любой путь из s в t в полученном ориентированном графе называется *дополняющим путем* потока f.

1. Для любого потока f и разреза (S, T) сети G докажите, что $|f| = f(S, T)$.

2. Пусть поток f максимален. Тогда в остаточной сети G_f нет дополняющего пути.

3. Пусть в остаточной сети G_f нет дополняющего пути. Тогда существует разрез (S, T) такой, что $|f| = c(S, T)$.

4. Теорема Форда-Фалкерсона. В сети G с пропускной способностью c задан поток f. Докажите, что следующие утверждения равносильны:

1. Поток f максимален.
2. Существует разрез (S, T) такой, что $|f| = c(S, T)$.
3. В остаточной сети G_f нет дополняющего пути.

Следствие. Величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза.

5. Докажите, что в целочисленной цепи существует максимальный целочисленный поток.

6. Докажите, что если в сети, где все пропускные способности ребер равны 1, существует целочисленный поток величиной n, то существует и n реберно непересекающихся путей.

7. Теорема Менгера. В ориентированном графе между вершинами u и v существует n реберно непересекающихся путей тогда и только тогда, когда после удаления любых $n - 1$ ребер, существует путь из u в v.