1. Дано натуральное число, большее 4. За ход разрешается представить его в виде суммы нескольких неединичных натуральных слагаемых и заменить на их произведение. Докажите, что не более чем за 4 хода можно получить факториал какого-нибудь натурального числа.

2. Какое наибольшее число белых и чёрных фишек можно расставить на шахматной доске так, чтобы на каждой горизонтали и на каждой вертикали белых фишек было ровно в два раза больше, чем чёрных?

3. Дан выпуклый равносторонний пятиугольник $ABCDE$, у которого $\angle A = 120°$, $\angle C = 135°$. Чему равен угол D? Ответ не должен содержать обратных тригонометрических функций.

4. В бумажном треугольнике все углы измеряются целым числом градусов. Петя может разрезать треугольник по биссектрисе и выбросить одну из частей. С новым треугольником он может повторить такую же операцию, и так сколько угодно раз. Докажите, что Петя сможет получить прямоугольный треугольник, в котором все углы измеряются целым числом градусов.

5. Есть ли 2016-значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2016 различных 2016-значных точных квадратов?

6. В равногранном тетраэдре $ABCD$ точки A', B', C', D' - центры вневписанных сфер. Докажите, что A, B, C, D - центры вневписанных сфер тетраэдра $A'B'C'D'$. (Тетраэдр называется равногранным, если его грани - равные треугольники. Вневписанная сфера - это сфера, которая касается одной из граней и продолжений остальных граней.)

7. Докажите, что не существует многочлена от двух переменных $P(x,y)$, для которого множеством решений неравенства $P(x,y) > 0$ является квадрант $\{(x,y) : x > 0, y > 0\}$.

8. Теорема Кэли. Докажите, что количество различных деревьев с n вершинами, занумерованными числами от 1 до n, равно n^{n-2}.

11 класс	Разнобой	14 марта 2016

1. Дано натуральное число, большее 4. За ход разрешается представить его в виде суммы нескольких неединичных натуральных слагаемых и заменить на их произведение. Докажите, что не более чем за 4 хода можно получить факториал какого-нибудь натурального числа.

2. Какое наибольшее число белых и чёрных фишек можно расставить на шахматной доске так, чтобы на каждой горизонтали и на каждой вертикали белых фишек было ровно в два раза больше, чем чёрных?

3. Дан выпуклый равносторонний пятиугольник $ABCDE$, у которого $\angle A = 120^\circ$, $\angle C = 135^\circ$. Чему равен угол D? Ответ не должен содержать обратных тригонометрических функций.

4. В бумажном треугольнике все углы измеряются целым числом градусов. Петя может разрезать треугольник по биссектрисе и выбросить одну из частей. С новым треугольником он может повторить такую же операцию, и так сколько угодно раз. Докажите, что Петя сможет получить прямоугольный треугольник, в котором все углы измеряются целым числом градусов.

5. Есть ли 2016-значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2016 различных 2016-значных точных квадратов?

6. В равногранном тетраэдре $ABCD$ точки A', B', C', D' - центры вневписанных сфер. Докажите, что A, B, C, D - центры вневписанных сфер тетраэдра $A'B'C'D'$. (Тетраэдр называется равногранным, если его грани - равные треугольники. Вневписанная сфера - это сфера, которая касается одной из граней и продолжений остальных граней.)

7. Докажите, что не существует многочлена от двух переменных $P(x, y)$, для которого множеством решений неравенства $P(x, y) > 0$ является квадрант $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$.

8. Теорема Кэли. Докажите, что количество различных деревьев с n вершинами, занумерованными числами от 1 до n, равно n^{n-2}.