В преддверии ММО

1. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_n = n^2$ при $1 \leqslant n \leqslant 5$ и при всех натуральных n справедливо равенство $a_{n+5} + a_{n+1} = a_{n+4} + a_n$. Найдите a_{2016}.

2. Сумма нескольких не обязательно различных положительных чисел не превосходила 100. Каждое из них заменили на новое следующим образом: сначала прологарифмировали по основанию 10, затем округлили стандартным образом до ближайшего целого числа и, наконец, возвели 10 в найденную целую степень. Могло ли оказаться так, что сумма новых чисел превышает 300?

3. Какое наибольшее количество множителей вида $\sin\frac{n\pi}{x}$ можно вычеркнуть в левой части уравнения $\sin\frac{\pi}{x}\sin\frac{2\pi}{x}\sin\frac{3\pi}{x}\ldots\sin\frac{2016\pi}{x} = 0$ так, чтобы число его натуральных корней не изменилось?

4. На плоской горизонтальной площадке стоят 5 прожекторов, каждый из которых испускает лазерный луч под одним из двух острых углов α или β к площадке и может вращаться лишь вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину луча. Известно, что любые 4 из этих прожекторов можно повернуть так, что все 4 испускаемых ими луча пересекутся в одной точке. Обязательно ли можно так повернуть все 5 прожекторов, чтобы все 5 лучей пересеклись в одной точке?

Обратите внимание, что пункты а) и б) на ММО оцениваются как отдельная задача!

5. На сторонах AD и CD параллелограмма $ABCD$ с центром O отмечены такие точки P и Q соответственно, что $\angle AOP = \angle COQ = \angle ABC$.

а) Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.

б) Докажите, что прямые AQ и CP пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

6. В каждой клетке квадратной таблицы написано по действительному числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма k наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма k наибольших чисел равна b.

а) Докажите, что если $k = 2$, то $a = b$.

б) В случае $k = 3$ приведите пример такой таблицы, для которой $a \neq b$.

7. При какой перестановке $a_1, a_2, \ldots, a_{2016}$ чисел $1, 2, \ldots, 2016$ значение выражения

$$a_1^{a_2^{a_3^{\cdots a_{2015}^{a_{2016}}}}}$$

будет наибольшим?

8. У повара в подчинении 10 поварят, некоторые из которых дружат между собой. Каждый рабочий день повар назначает одного или нескольких поварят на дежурство, а каждый из дежурных поварят уносит с работы по одному пирожному каждому своему недежурящему другу. В конце дня повар узнаёт количество пропавших пирожных. Сможет ли он за 45 рабочих дней узнать, кто из поварят дружит между собой, а кто нет?

1. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_n = n^2$ при $1 \leqslant n \leqslant 5$ и при всех натуральных n справедливо равенство $a_{n+5} + a_{n+1} = a_{n+4} + a_n$. Найдите a_{2016}.

2. Сумма нескольких не обязательно различных положительных чисел не превосходила 100. Каждое из них заменили на новое следующим образом: сначала прологарифмировали по основанию 10, затем округлили стандартным образом до ближайшего целого числа и, наконец, возвели 10 в найденную целую степень. Могло ли оказаться так, что сумма новых чисел превышает 300?

3. Какое наибольшее количество множителей вида $\sin\frac{n\pi}{x}$ можно вычеркнуть в левой части уравнения $\sin\frac{\pi}{x}\sin\frac{2\pi}{x}\sin\frac{3\pi}{x}\ldots\sin\frac{2016\pi}{x} = 0$ так, чтобы число его натуральных корней не изменилось?

4. На плоской горизонтальной площадке стоят 5 прожекторов, каждый из которых испускает лазерный луч под одним из двух острых углов α или β к площадке и может вращаться лишь вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину луча. Известно, что любые 4 из этих прожекторов можно повернуть так, что все 4 испускаемых ими луча пересекутся в одной точке. Обязательно ли можно так повернуть все 5 прожекторов, чтобы все 5 лучей пересеклись в одной точке?

Обратите внимание, что пункты а) и б) на ММО оцениваются как отдельная задача!

5. На сторонах AD и CD параллелограмма $ABCD$ с центром O отмечены такие точки P и Q соответственно, что $\angle AOP = \angle COQ = \angle ABC$.

а) Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.

б) Докажите, что прямые AQ и CP пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

6. В каждой клетке квадратной таблицы написано по действительному числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма k наибольших чисел равна a, а в каждом столбце таблицы сумма k наибольших чисел равна b.

а) Докажите, что если $k = 2$, то $a = b$.

б) В случае $k = 3$ приведите пример такой таблицы, для которой $a \neq b$.

7. При какой перестановке $a_1, a_2, \ldots, a_{2016}$ чисел $1, 2, \ldots, 2016$ значение выражения

$$a_1^{a_2^{a_3^{\cdots a_{2015}^{a_{2016}}}}}$$

будет наибольшим?

8. У повара в подчинении 10 поварят, некоторые из которых дружат между собой. Каждый рабочий день повар назначает одного или нескольких поварят на дежурство, а каждый из дежурных поварят уносит с работы по одному пирожному каждому своему недежурящему другу. В конце дня повар узнаёт количество пропавших пирожных. Сможет ли он за 45 рабочих дней узнать, кто из поварят дружит между собой, а кто нет?