

Теорема Паскаля. Если точки A, B, C, D, E, F лежат на одной окружности ω , то точки пересечения прямых AB и DE , BC и EF , CD и AF лежат на одной прямой.

Заметим, что в теореме Паскаля можно считать, что некоторые из 6 точек совпадают. При этом, например, если точки A и B совпадают, то под прямой AB понимается касательная к окружности ω , проведенная в точке A .

Упражнение. Какие осмысленные следствия есть у теоремы Паскаля, если точек на окружности 5? А если 4? А если 3?

1. Внутри треугольника ABC выбрана точка M . Прямые AM , BM , CM пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A' , B' , C' соответственно. Докажите, что главные диагонали шестиугольника, образованного пересечением треугольников ABC и $A'B'C'$, пересекаются в точке M .

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O . На сторонах BC и CD нашлись точки P и Q такие, что $PA \perp AD$, $QA \perp AB$. Докажите, что точки P , O , Q лежат на одной прямой.

3. В треугольнике ABC биссектрисы углов B и C пересекают стороны AC и AB в точках B_1 и C_1 , а описанную окружность — в точках B' и C' соответственно. Прямые B_1C_1 и $B'C'$ пересекаются в точке X . Докажите, что AX касается описанной окружности треугольника ABC .

4. F — середина дуги AB описанной окружности четырехугольника $ABCD$, не содержащей точек C и D , P и Q — точки пересечения прямых DF и AC , CF и BD . Докажите, что $AB \parallel PQ$.

5. Хорда CD окружности перпендикулярна ее диаметру AB , а хорда AE делит радиус OC пополам. Докажите, что хорда DE делит пополам хорду BC .

6. Пусть A' — точка, диаметрально противоположная точке A в описанной окружности треугольника ABC с центром O . Касательная к описанной окружности в точке A' пересекает прямую BC в точке X . Прямая OX пересекает стороны AB и AC в точках M и N . Докажите, что $OM = ON$.

7. D — середина дуги BC описанной окружности ω остроугольного треугольника ABC . На сторонах AB и AC выбраны точки M и N соответственно так, что $MN \parallel BC$. Пусть P и Q — точки пересечения прямых DM и DN с ω , R — точка пересечения прямых MN и PQ . Докажите, что AR — касательная к ω .

8. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 и биссектрисы AA_2 и BB_2 ; вписанная окружность касается сторон BC и AC в точках A_3 и B_3 . Докажите, что прямые A_1B_1 , A_2B_2 и A_3B_3 пересекаются в одной точке или параллельны.

Теорема Паскаля. Если точки A, B, C, D, E, F лежат на одной окружности ω , то точки пересечения прямых AB и DE , BC и EF , CD и AF лежат на одной прямой.

Заметим, что в теореме Паскаля можно считать, что некоторые из 6 точек совпадают. При этом, например, если точки A и B совпадают, то под прямой AB понимается касательная к окружности ω , проведенная в точке A .

Упражнение. Какие осмысленные следствия есть у теоремы Паскаля, если точек на окружности 5? А если 4? А если 3?

1. Внутри треугольника ABC выбрана точка M . Прямые AM , BM , CM пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A' , B' , C' соответственно. Докажите, что главные диагонали шестиугольника, образованного пересечением треугольников ABC и $A'B'C'$, пересекаются в точке M .

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O . На сторонах BC и CD нашлись точки P и Q такие, что $PA \perp AD$, $QA \perp AB$. Докажите, что точки P , O , Q лежат на одной прямой.

3. В треугольнике ABC биссектрисы углов B и C пересекают стороны AC и AB в точках B_1 и C_1 , а описанную окружность — в точках B' и C' соответственно. Прямые B_1C_1 и $B'C'$ пересекаются в точке X . Докажите, что AX касается описанной окружности треугольника ABC .

4. F — середина дуги AB описанной окружности четырехугольника $ABCD$, не содержащей точек C и D , P и Q — точки пересечения прямых DF и AC , CF и BD . Докажите, что $AB \parallel PQ$.

5. Хорда CD окружности перпендикулярна ее диаметру AB , а хорда AE делит радиус OC пополам. Докажите, что хорда DE делит пополам хорду BC .

6. Пусть A' — точка, диаметрально противоположная точке A в описанной окружности треугольника ABC с центром O . Касательная к описанной окружности в точке A' пересекает прямую BC в точке X . Прямая OX пересекает стороны AB и AC в точках M и N . Докажите, что $OM = ON$.

7. D — середина дуги BC описанной окружности ω остроугольного треугольника ABC . На сторонах AB и AC выбраны точки M и N соответственно так, что $MN \parallel BC$. Пусть P и Q — точки пересечения прямых DM и DN с ω , R — точка пересечения прямых MN и PQ . Докажите, что AR — касательная к ω .

8. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 и биссектрисы AA_2 и BB_2 ; вписанная окружность касается сторон BC и AC в точках A_3 и B_3 . Докажите, что прямые A_1B_1 , A_2B_2 и A_3B_3 пересекаются в одной точке или параллельны.