11 класс	Рекурренты	22 февраля 2016

Определение. Соотношение, выражающее $(n+1)$-й член последовательности через n-й член, $(n-1)$-й член и т.д., называется *рекуррентным* или *возвратным*, а последовательность называют заданной *рекуррентно*. Если же последовательность задается так, что её n-й член выражается через само число n и функции от него, то говорят, что последовательность задана *явно*.

Линейные рекуррентные последовательности второго порядка – те, для которых возвратное соотношение имеет вид $a_{n+2} = C_1a_{n+1} + C_2a_n$, где C_1 и C_2 – некоторые числа. Аналогично определяются возвратные соотношения первого, третьего и более высоких порядков.

Упражнение. Докажите, что любая арифметическая прогрессия является линейной рекуррентной последовательностью второго порядка, а геометрическая – первого.

1. Найдите линейное рекуррентное соотношение для последовательностей $x_n = n$ и $x_n = n^2$.

2. Докажите, что последовательность $p_n = n^k$ является линейной рекуррентной последовательностью $(k+1)$-го порядка.

3. Рассмотрим последовательность $\{r_n\}$, удовлетворяющую соотношению $r_{n+2} = 5r_{n+1} - 6r_n$. (1)

а) Докажите, что для любого числа C последовательность $\{Cr_n\}$ также удовлетворяет этому соотношению.

б) Докажите, что если две последовательности $\{r_n\}$ и $\{s_n\}$ удовлетворяют (1), то и последовательность $\{r_n + s_n\}$ ему также удовлетворяет.

в) Найдите все геометрические прогрессии, удовлетворяющие соотношению (1).

г) Напишите формулу с двумя произвольными параметрами α и β, являющуюся формулой n-го члена для последовательностей, удовлетворяющих (1).

д) Докажите, что ваша формула исчерпывает все последовательности, удовлетворяющие (1) (каждая такая последовательность однозначно задается двумя первыми членами или параметрами α и β).

4. а) Формула Бине. Проделайте аналогичные операции и найдите формулу n-го члена последовательности Фибоначчи: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Докажите, что эта страшная формула при всех n дает в результате только целые числа.

б) Найдите формулу n-го члена последовательности $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_{n+2} = 4t_{n+1} - 4t_n$.

в) Найдите формулу n-го члена последовательности $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n$.

5. Докажите, что для любых натуральных значений m и n существует натуральное число k такое, что $(\sqrt{m} + \sqrt{m+1})^n = \sqrt{k} + \sqrt{k+1}$.

6. а) Докажите, что каждый член последовательности $(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n + 2$, где $n \in \mathbb{N}$, является целым числом.

б) Докажите, что $(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{2n} + (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^{2n} + 2$, где $n \in \mathbb{N}$, является точным квадратом.

в) Докажите, что $(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{2n+1} + (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^{2n+1} + 2$, где $n \in \mathbb{N}$, является упятеренным точным квадратом.

7. Сколькими способами можно замостить прямоугольную доску размера $3 \times n$ доминошками 1×2?

8. Сколькими способами можно выписать в строчку n ноликов, крестиков и звёздочек, так, чтобы звёздочки не стояли рядом с крестиками?

9. Сколько 2016-значных чисел удовлетворяют следующим условиям: все цифры числа принадлежат множеству $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, а любые две соседние цифры отличаются на 1?

10. Дано натуральное n. На какую наибольшую степень двойки делится число $[(3 + \sqrt{11})^{2n-1}]$?

11. Последовательность $\{a_k\}$ определяется рекуррентным соотношением $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + ka_{n-1}$, k – некоторая константа, $n \in \mathbb{N}$. Найдите наименьшее k такое, что если простое число p не больше 101, то a_p делится на p, а если простое число p больше 101, то a_p не делится на p.

11 класс	Рекурренты	22 февраля 2016

Определение. Соотношение, выражающее $(n+1)$-й член последовательности через n-й член, $(n-1)$-й член и т.д., называется *рекуррентным* или *возвратным*, а последовательность называют заданной *рекуррентно.* Если же последовательность задается так, что её n-й член выражается через само число n и функции от него, то говорят, что последовательность задана *явно.*

Линейные рекуррентные последовательности второго порядка – те, для которых возвратное соотношение имеет вид $a_{n+2} = C_1a_{n+1} + C_2a_n$, где C_1 и C_2 – некоторые числа. Аналогично определяются возвратные соотношения первого, третьего и более высоких порядков.

Упражнение. Докажите, что любая арифметическая прогрессия является линейной рекуррентной последовательностью второго порядка, а геометрическая – первого.

1. Найдите линейное рекуррентное соотношение для последовательностей $x_n = n$ и $x_n = n^2$.

2. Докажите, что последовательность $p_n = n^k$ является линейной рекуррентной последовательностью $(k+1)$-го порядка.

3. Рассмотрим последовательность $\{r_n\}$, удовлетворяющую соотношению $r_{n+2} = 5r_{n+1} - 6r_n$. (1)

а) Докажите, что для любого числа C последовательность $\{Cr_n\}$ также удовлетворяет этому соотношению.

б) Докажите, что если две последовательности $\{r_n\}$ и $\{s_n\}$ удовлетворяют (1), то и последовательность $\{r_n + s_n\}$ ему также удовлетворяет.

в) Найдите все геометрические прогрессии, удовлетворяющие соотношению (1).

г) Напишите формулу с двумя произвольными параметрами α и β, являющуюся формулой n-го члена для последовательностей, удовлетворяющих (1).

д) Докажите, что ваша формула исчерпывает все последовательности, удовлетворяющие (1) (каждая такая последовательность однозначно задается двумя первыми членами или параметрами α и β).

4. а) Формула Бине. Проделайте аналогичные операции и найдите формулу n-го члена последовательности Фибоначчи: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Докажите, что эта страшная формула при всех n дает в результате только целые числа.

б) Найдите формулу n-го члена последовательности $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_{n+2} = 4t_{n+1} - 4t_n$.

в) Найдите формулу n-го члена последовательности $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 5u_n$.

5. Докажите, что для любых натуральных значений m и n существует натуральное число k такое, что $(\sqrt{m} + \sqrt{m+1})^n = \sqrt{k} + \sqrt{k+1}$.

6. а) Докажите, что каждый член последовательности $(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n + 2$, где $n \in \mathbb{N}$, является целым числом.

б) Докажите, что $(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{2n} + (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^{2n} + 2$, где $n \in \mathbb{N}$, является точным квадратом.

в) Докажите, что $(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{2n+1} + (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^{2n+1} + 2$, где $n \in \mathbb{N}$, является упятеренным точным квадратом.

7. Сколькими способами можно замостить прямоугольную доску размера $3 \times n$ доминошками 1×2?

8. Сколькими способами можно выписать в строчку n ноликов, крестиков и звёздочек, так, чтобы звёздочки не стояли рядом с крестиками?

9. Сколько 2016-значных чисел удовлетворяют следующим условиям: все цифры числа принадлежат множеству $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, а любые две соседние цифры отличаются на 1?

10. Дано натуральное n. На какую наибольшую степень двойки делится число $[(3 + \sqrt{11})^{2n-1}]$?

11. Последовательность $\{a_k\}$ определяется рекуррентным соотношением $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + ka_{n-1}$, k – некоторая константа, $n \in \mathbb{N}$. Найдите наименьшее k такое, что если простое число p не больше 101, то a_p делится на p, а если простое число p больше 101, то a_p не делится на p.