

1. Существуют ли 2016 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится на их сумму?
2. Существует ли арифметическая прогрессия  $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$  с ненулевой разностью такая, что каждый её член имеет вид  $\frac{1}{n}$  для некоторого натурального  $n$ ?
3. Существуют ли натуральные числа  $a, b, c$ , большие миллиарда, такие, что их произведение делится на любое из них, увеличенное на 2016?
4. Существуют ли 2016 нецелых рациональных чисел, произведение любых двух из которых – целое число?
5. а) Существуют ли натуральные числа  $a, b$  и  $c$  такие, что  $a^9 + b^{10} = c^{11}$ ?  
б) Существуют ли натуральные числа  $a, b$  и  $c$  (причём  $a$  – нечётное) такие, что  $a^{10} + b^{10} = c^{11}$ ?
6. Представимо ли число  $2016^{2017}$  в виде суммы кубов четырёх различных натуральных чисел?
7. Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 2016$ . Обязательно ли число  $abc$  является  
а) точным квадратом;  
б) точным кубом?
8. Существуют ли натуральные числа  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2016}$  такие, что

$$\text{НОК}(a_1, a_2) > \text{НОК}(a_2, a_3) > \dots > \text{НОК}(a_{2015}, a_{2016})?$$

9. Пусть  $D(n)$  – количество различных простых делителей натурального числа  $n$ . Конечно или бесконечно число пар различных натуральных чисел  $a$  и  $b$  таких, что  $D(a + b) = D(a) + D(b) > 10^{2016}$ ?
10. Дано натуральное число  $n$ . Существуют ли  $n$  попарно различных натуральных чисел таких, что их сумма является точной 2015-й степенью, а их произведение – точной 2016-й степенью?
11. Натуральное число  $N$  представляется в виде  $N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2 = e_1 - e_2$ , где  $a_1$  и  $a_2$  – квадраты,  $b_1$  и  $b_2$  – кубы,  $c_1$  и  $c_2$  – пятые степени,  $d_1$  и  $d_2$  – седьмые степени,  $e_1$  и  $e_2$  – одиннадцатые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел  $a_1, b_1, c_1, d_1$  и  $e_1$  найдутся два равных?

1. Существуют ли 2016 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится на их сумму?
2. Существует ли арифметическая прогрессия  $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$  с ненулевой разностью такая, что каждый её член имеет вид  $\frac{1}{n}$  для некоторого натурального  $n$ ?
3. Существуют ли натуральные числа  $a, b, c$ , большие миллиарда, такие, что их произведение делится на любое из них, увеличенное на 2016?
4. Существуют ли 2016 нецелых рациональных чисел, произведение любых двух из которых – целое число?
5. а) Существуют ли натуральные числа  $a, b$  и  $c$  такие, что  $a^9 + b^{10} = c^{11}$ ?  
б) Существуют ли натуральные числа  $a, b$  и  $c$  (причём  $a$  – нечётное) такие, что  $a^{10} + b^{10} = c^{11}$ ?
6. Представимо ли число  $2016^{2017}$  в виде суммы кубов четырёх различных натуральных чисел?
7. Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 2016$ . Обязательно ли число  $abc$  является  
а) точным квадратом;  
б) точным кубом?
8. Существуют ли натуральные числа  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2016}$  такие, что

$$\text{НОК}(a_1, a_2) > \text{НОК}(a_2, a_3) > \dots > \text{НОК}(a_{2015}, a_{2016})?$$

9. Пусть  $D(n)$  – количество различных простых делителей натурального числа  $n$ . Конечно или бесконечно число пар различных натуральных чисел  $a$  и  $b$  таких, что  $D(a + b) = D(a) + D(b) > 10^{2016}$ ?
10. Дано натуральное число  $n$ . Существуют ли  $n$  попарно различных натуральных чисел таких, что их сумма является точной 2015-й степенью, а их произведение – точной 2016-й степенью?
11. Натуральное число  $N$  представляется в виде  $N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2 = e_1 - e_2$ , где  $a_1$  и  $a_2$  – квадраты,  $b_1$  и  $b_2$  – кубы,  $c_1$  и  $c_2$  – пятые степени,  $d_1$  и  $d_2$  – седьмые степени,  $e_1$  и  $e_2$  – одиннадцатые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел  $a_1, b_1, c_1, d_1$  и  $e_1$  найдутся два равных?