11 класс | Разнобой | 8 февраля 2016

1. Дана полоска 1×10. В клетки записываются числа 1, 2, …, 10 по следующему правилу: сначала в какую-нибудь клетку пишут число 1, затем число 2 записывают в соседнюю клетку, затем число 3 — в одну из соседних с уже занятыми, и так далее. Сколькими способами это можно сделать?

2. Существует ли в пространстве куб, расстояния от вершин которого до данной плоскости равны 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

3. Существует ли выпуклый n-угольник, у которого все стороны равны, а все вершины лежат на параболе $y = x^2$, если **a)** $n = 2015$; **b)** $n = 2016$?

4. Дан многочлен $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_0$, у которого каждый коэффициент a_i принадлежит отрезку $[100, 101]$. При каком минимальном n у такого многочлена может найтись действительный корень?

5. Есть 100 гирек различного веса и чашечные весы. За какое наименьшее количество взвешиваний можно определить гирю наибольшего веса, если на чашки весов можно класть любое количество гирь?

6. Точки B_0 и C_0 — середины сторон AC и AB треугольника ABC, точка A_1 — середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точку A. Описанные окружности треугольников AB_0A_1 и AC_0A_1 пересекают серединные перпендикуляры к AB и AC в точках M и N соответственно, а прямые MN и B_0C_0 пересекаются в точке P. Докажите, что $PA = PA_1$.

7. Докажите, что при любых натуральных $0 < k < m < n$ числа C_n^k и C_n^m не взаимно просты.

11 класс | Разнобой | 8 февраля 2016

1. Дана полоска 1×10. В клетки записываются числа 1, 2, …, 10 по следующему правилу: сначала в какую-нибудь клетку пишут число 1, затем число 2 записывают в соседнюю клетку, затем число 3 — в одну из соседних с уже занятыми, и так далее. Сколькими способами это можно сделать?

2. Существует ли в пространстве куб, расстояния от вершин которого до данной плоскости равны 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

3. Существует ли выпуклый n-угольник, у которого все стороны равны, а все вершины лежат на параболе $y = x^2$, если **a)** $n = 2015$; **b)** $n = 2016$?

4. Дан многочлен $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_0$, у которого каждый коэффициент a_i принадлежит отрезку $[100, 101]$. При каком минимальном n у такого многочлена может найтись действительный корень?

5. Есть 100 гирек различного веса и чашечные весы. За какое наименьшее количество взвешиваний можно определить гирю наибольшего веса, если на чашки весов можно класть любое количество гирь?

6. Точки B_0 и C_0 — середины сторон AC и AB треугольника ABC, точка A_1 — середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точку A. Описанные окружности треугольников AB_0A_1 и AC_0A_1 пересекают серединные перпендикуляры к AB и AC в точках M и N соответственно, а прямые MN и B_0C_0 пересекаются в точке P. Докажите, что $PA = PA_1$.

7. Докажите, что при любых натуральных $0 < k < m < n$ числа C_n^k и C_n^m не взаимно просты.