11 класс	И вновь готовимся к регионалке	28 января 2016

1. Существуют ли 2016 различных натуральных чисел таких, что сумма любых 2015 из них не меньше квадрата оставшегося?

2. Существует ли такое действительное число α, что число $\cos\alpha$ иррационально, а все числа $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\cos 5\alpha$ рациональны?

3. В стране есть столица и ещё 2015 городов, занумерованных числами от 1 до 2015. Столица соединена дорогой со всеми городами. Кроме того, первый соединен со вторым, второй с третьим, третий с четвертым, …, 2014-й с 2015-м, 2015-й с первым. Король и премьер-министр играют в игру. Каждый своим ходом устраивает праздник в свою честь в двух соединенных дорогой городах, где до этого праздника не устраивалось. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает независимо от ходов соперника, если начинает король?

4. На окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, выбрана точка K. Оказалось, что прямая CK пересекает отрезок AD в точке M такой, что $AM : MD = 2$. Пусть O – центр прямоугольника. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника OKD лежит на окружности, описанной около треугольника COD.

5. Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается число 4 или 5, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 2. Сколько последовательностей ему придётся выписать?

6. Назовем тройку натуральных чисел (a, b, c) *квадратной*, если они образуют арифметическую прогрессию (именно в таком порядке), число b взаимно просто с каждым из чисел a и c, а число abc является точным квадратом. Докажите, что для любой квадратной тройки найдётся другая квадратная тройка, имеющая с ней хотя бы одно общее число.

7. По кругу стоят 2009 целых неотрицательных чисел, не превышающих 100. Разрешается прибавить по 1 к двум соседним числам, причем с любыми двумя соседними числами эту операцию можно проделать не более k раз. При каком наименьшем k все числа гарантированно можно сделать равными?

11 класс	И вновь готовимся к регионалке	28 января 2016

1. Существуют ли 2016 различных натуральных чисел таких, что сумма любых 2015 из них не меньше квадрата оставшегося?

2. Существует ли такое действительное число α, что число $\cos\alpha$ иррационально, а все числа $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\cos 5\alpha$ рациональны?

3. В стране есть столица и ещё 2015 городов, занумерованных числами от 1 до 2015. Столица соединена дорогой со всеми городами. Кроме того, первый соединен со вторым, второй с третьим, третий с четвертым, …, 2014-й с 2015-м, 2015-й с первым. Король и премьер-министр играют в игру. Каждый своим ходом устраивает праздник в свою честь в двух соединенных дорогой городах, где до этого праздника не устраивалось. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает независимо от ходов соперника, если начинает король?

4. На окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, выбрана точка K. Оказалось, что прямая CK пересекает отрезок AD в точке M такой, что $AM : MD = 2$. Пусть O – центр прямоугольника. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника OKD лежит на окружности, описанной около треугольника COD.

5. Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается число 4 или 5, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 2. Сколько последовательностей ему придётся выписать?

6. Назовем тройку натуральных чисел (a, b, c) *квадратной*, если они образуют арифметическую прогрессию (именно в таком порядке), число b взаимно просто с каждым из чисел a и c, а число abc является точным квадратом. Докажите, что для любой квадратной тройки найдётся другая квадратная тройка, имеющая с ней хотя бы одно общее число.

7. По кругу стоят 2009 целых неотрицательных чисел, не превышающих 100. Разрешается прибавить по 1 к двум соседним числам, причем с любыми двумя соседними числами эту операцию можно проделать не более k раз. При каком наименьшем k все числа гарантированно можно сделать равными?