11 класс | Добавка | 28 января 2016

1. Найдите все x, при которых $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} 2x$ принимают одновременно целые значения.

2. О выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle CAD + \angle BCA = 180^\circ$ и $AB = BC + AD$. Докажите, что $\angle BAC + \angle ACD = \angle CDA$.

3. По бесконечной шахматной доске ходит (m, n)–крокодил, который может за один ход сдвинуться на m клеток по горизонтали или вертикали, а затем – на n клеток в перпендикулярном направлении. При каких m и n (m, n)–крокодил сможет попасть из любой клетки доски в любую другую?

4. Назовем *рамкой* клетчатый квадрат $n \times n$, из которого удалили квадрат $(n-2) \times (n-2)$ с тем же центром. Клеточки рамки можно красить в белый и чёрный цвета. Назовем раскраску рамки *хорошей*, если рамку можно разрезать на доминошки так, что каждая доминошка состоит из клеточек разных цветов. Сколько существует хороших раскрасок?

5. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ параллельны. Точки M, N и K – точки пересечения прямых BD и AE, AC и DF, CE и BF соответственно. Докажите, что перпендикуляры, проведённые из точек M, N и K к прямым AB, CD и EF соответственно, пересекаются в одной точке.

6. Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{31}, b_1, b_2, \ldots, b_{31}$ таковы, что $a_1 < a_2 < \ldots < a_{31} \leqslant 2015$, $b_1 < b_2 < \ldots < b_{31} \leqslant 2015$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_{31} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{31}$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_{31} - b_{31}|$.

7. В стране 60 городов, каждые два из которых соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно покрасить четыре города в красный цвет, а другие четыре – в зелёный так, чтобы каждая дорога, соединяющая красный город с зелёным, была направлена от красного к зелёному.

11 класс | Добавка | 28 января 2016

1. Найдите все x, при которых $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} 2x$ принимают одновременно целые значения.

2. О выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle CAD + \angle BCA = 180^\circ$ и $AB = BC + AD$. Докажите, что $\angle BAC + \angle ACD = \angle CDA$.

3. По бесконечной шахматной доске ходит (m, n)–крокодил, который может за один ход сдвинуться на m клеток по горизонтали или вертикали, а затем – на n клеток в перпендикулярном направлении. При каких m и n (m, n)–крокодил сможет попасть из любой клетки доски в любую другую?

4. Назовем *рамкой* клетчатый квадрат $n \times n$, из которого удалили квадрат $(n-2) \times (n-2)$ с тем же центром. Клеточки рамки можно красить в белый и чёрный цвета. Назовем раскраску рамки *хорошей*, если рамку можно разрезать на доминошки так, что каждая доминошка состоит из клеточек разных цветов. Сколько существует хороших раскрасок?

5. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ параллельны. Точки M, N и K – точки пересечения прямых BD и AE, AC и DF, CE и BF соответственно. Докажите, что перпендикуляры, проведённые из точек M, N и K к прямым AB, CD и EF соответственно, пересекаются в одной точке.

6. Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{31}, b_1, b_2, \ldots, b_{31}$ таковы, что $a_1 < a_2 < \ldots < a_{31} \leqslant 2015$, $b_1 < b_2 < \ldots < b_{31} \leqslant 2015$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_{31} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{31}$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_{31} - b_{31}|$.

7. В стране 60 городов, каждые два из которых соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно покрасить четыре города в красный цвет, а другие четыре – в зелёный так, чтобы каждая дорога, соединяющая красный город с зелёным, была направлена от красного к зелёному.