11 класс | Плоский случай в помощь | 25 января 2016

1. A_1, B_1, C_1 — проекции вершины D тетраэдра $ABCD$ на бисекторные плоскости при ребрах BC, AC, AB соответственно. Докажите, что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны.

2. Внутри некоторого тетраэдра взяли произвольную точку X. Через каждую вершину тетраэдра провели прямую, параллельную отрезку, соединяющему X с точкой пересечения медиан противоположной грани. Докажите, что четыре полученные прямые пересекаются в одной точке.

3. Дана треугольная пирамида $ABCD$. В ней R — радиус описанной сферы, r — радиус вписанной сферы, a — длина наибольшего ребра, h — длина наименьшей высоты (на какую-то грань). Докажите, что $R/r > a/h$.

4. Вписанная и вневписанная сферы треугольной пирамиды $ABCD$ касаются её грани BCD в различных точках X и Y. Докажите, что треугольник AXY – тупоугольный.

5. Три плоскости разрезают параллелепипед на 8 шестигранников, все грани которых – четырёхугольники (каждая плоскость пересекает свои две пары противоположных граней параллелепипеда и не пересекает две оставшиеся грани). Известно, что вокруг одного из этих шестигранников можно описать сферу. Докажите, что и вокруг каждого из них можно описать сферу.

6. Высоты тетраэдра пересекаются в одной точке. Докажите, что эта точка, основание одной из высот и три точки, делящие другие высоты в одношении 2:1, считая от вершин, лежат на одной сфере.

7. Внутри выпуклого многогранника взята точка P и несколько прямых $l_1, \ldots, l_n$, проходящих через точку P и не лежащих в одной плоскости. Каждой грани многогранника поставим в соответствие ту прямую, которая образует наибольший угол с плоскостью этой грани (если таких прямых несколько, то выберем любую из них). Докажите, что найдется грань, которая пересекается с соответствующей ей прямой.

11 класс | Плоский случай в помощь | 25 января 2016

1. A_1, B_1, C_1 — проекции вершины D тетраэдра $ABCD$ на бисекторные плоскости при ребрах BC, AC, AB соответственно. Докажите, что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны.

2. Внутри некоторого тетраэдра взяли произвольную точку X. Через каждую вершину тетраэдра провели прямую, параллельную отрезку, соединяющему X с точкой пересечения медиан противоположной грани. Докажите, что четыре полученные прямые пересекаются в одной точке.

3. Дана треугольная пирамида $ABCD$. В ней R — радиус описанной сферы, r — радиус вписанной сферы, a — длина наибольшего ребра, h — длина наименьшей высоты (на какую-то грань). Докажите, что $R/r > a/h$.

4. Вписанная и вневписанная сферы треугольной пирамиды $ABCD$ касаются её грани BCD в различных точках X и Y. Докажите, что треугольник AXY – тупоугольный.

5. Три плоскости разрезают параллелепипед на 8 шестигранников, все грани которых – четырёхугольники (каждая плоскость пересекает свои две пары противоположных граней параллелепипеда и не пересекает две оставшиеся грани). Известно, что вокруг одного из этих шестигранников можно описать сферу. Докажите, что и вокруг каждого из них можно описать сферу.

6. Высоты тетраэдра пересекаются в одной точке. Докажите, что эта точка, основание одной из высот и три точки, делящие другие высоты в одношении 2:1, считая от вершин, лежат на одной сфере.

7. Внутри выпуклого многогранника взята точка P и несколько прямых $l_1, \ldots, l_n$, проходящих через точку P и не лежащих в одной плоскости. Каждой грани многогранника поставим в соответствие ту прямую, которая образует наибольший угол с плоскостью этой грани (если таких прямых несколько, то выберем любую из них). Докажите, что найдется грань, которая пересекается с соответствующей ей прямой.