1. Числа x, y и z таковы, что все три числа $x+yz$, $y+zx$ и $z+xy$ рациональны, а $x^2+y^2=1$. Докажите, что число xyz^2 также рационально.

2. Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство

$$(n-1)^{n+1}(n+1)^{n-1} < n^{2n}.$$

3. В ряду из 2009 гирек вес каждой гирьки составляет целое число граммов и не превышает 1 кг. Веса любых двух соседних гирек отличаются ровно на 1 г, а общий вес всех гирь в граммах является четным числом. Докажите, что гирьки можно разделить на две кучки, суммы весов в которых равны.

4. Через вершины основания четырехугольной пирамиды $SABCD$ проведены прямые, параллельные противоположным боковым ребрам (через вершину A — параллельно SC, и так далее). Эти четыре прямые пересеклись в одной точке. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

5. Вася нарисовал на плоскости несколько окружностей и провел всевозможные общие касательные к каждой паре этих окружностей. Оказалось, что проведенные прямые содержат все стороны некоторого правильного 2011-угольника. Какое наименьшее количество окружностей мог нарисовать Вася?

6. Даны различные натуральные числа a, b. На координатной плоскости нарисованы графики функций $y=\sin ax$, $y=\sin bx$ и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число c, отличное от a, b и такое, что график функции $y=\sin cx$ проходит через все отмеченные точки.

7. В клетки квадрата 100×100 расставили числа $1, 2, \ldots, 10000$, каждое — по одному разу; при этом числа, различающиеся на 1, записаны в соседних по стороне клетках. После этого посчитали расстояние между центрами каждых двух клеток, числа в которых различаются ровно на 5000. Пусть S — минимальное из этих расстояний. Какое наибольшее значение может принимать S?

8. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ таков, что $AB\cdot CD = AD\cdot BC$. Докажите, что $\angle BAC+\angle CBD+\angle DCA+\angle ADB=180^\circ$.

1. Числа x, y и z таковы, что все три числа $x + yz$, $y + zx$ и $z + xy$ рациональны, а $x^2 + y^2 = 1$. Докажите, что число xyz^2 также рационально.

2. Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство

$$(n-1)^{n+1}(n+1)^{n-1} < n^{2n}.$$

3. В ряду из 2009 гирек вес каждой гирьки составляет целое число граммов и не превышает 1 кг. Веса любых двух соседних гирек отличаются ровно на 1 г, а общий вес всех гирь в граммах является четным числом. Докажите, что гирьки можно разделить на две кучки, суммы весов в которых равны.

4. Через вершины основания четырехугольной пирамиды $SABCD$ проведены прямые, параллельные противоположным боковым ребрам (через вершину A — параллельно SC, и так далее). Эти четыре прямые пересеклись в одной точке. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

5. Вася нарисовал на плоскости несколько окружностей и провел всевозможные общие касательные к каждой паре этих окружностей. Оказалось, что проведенные прямые содержат все стороны некоторого правильного 2011-угольника. Какое наименьшее количество окружностей мог нарисовать Вася?

6. Даны различные натуральные числа a, b. На координатной плоскости нарисованы графики функций $y = \sin ax$, $y = \sin bx$ и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число c, отличное от a, b и такое, что график функции $y = \sin cx$ проходит через все отмеченные точки.

7. В клетки квадрата 100×100 расставили числа $1, 2, \ldots, 10000$, каждое — по одному разу; при этом числа, различающиеся на 1, записаны в соседних по стороне клетках. После этого посчитали расстояние между центрами каждых двух клеток, числа в которых различаются ровно на 5000. Пусть S — минимальное из этих расстояний. Какое наибольшее значение может принимать S?

8. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ таков, что $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Докажите, что $\angle BAC + \angle CBD + \angle DCA + \angle ADB = 180^\circ$.