11 класс

Добавка

21 января 2016

1. Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k.

2. В ЕГЭ принимали участие 25 школьников. Экзамен состоял из нескольких вопросов, на каждый из которых можно было дать один из пяти вариантов ответа. Оказалось, что любые два школьника не более чем на один вопрос ответили одинаково. Докажите, что в ЕГЭ было не более 6 вопросов.

3. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ – перестановка всех натуральных чисел от 1 до 100. Пусть $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $\ldots$, $S_{100} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$. Какое наибольшее количество точных квадратов может оказаться среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$?

4. Вдоль дороги стоят 100 пронумерованных подряд столбов, как-то покрашенных в три цвета. Мэр столбов не видит. Он может назвать пару номеров, и, если столбы разного цвета, их перекрасят в третий цвет, а если одинакового – то так и оставляют. О результате мэру докладывают туфту, которой опытный мэр не доверяет. Всегда ли мэр может с помощью таких операций добиться, чтобы в какой-то момент все столбы стали одинакового цвета?

5. Найдите все $k > 0$, при которых существует строго убывающая функция $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такая, что при всех положительных x справедливо неравенство $g(x) \geqslant kg(x + g(x))$.

6. Пусть n – натуральное число, а k – количество простых чисел, не превосходящих n. Множество A, состоящее менее чем из k натуральных чисел, не превосходящих n, таково, что ни один его элемент не делится на другой. Докажите, что существует множество B, состоящее из k натуральных чисел, не превосходящих n, содержащее в себе множество A, такое, что ни один его элемент не делится на другой.

7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что на плоскости существует квадрат $A'B'C'D'$ такой, что $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$, $D \neq D'$, и прямые AA', BB', CC', DD' пересекаются в одной точке.

11 класс

Добавка

21 января 2016

1. Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k.

2. В ЕГЭ принимали участие 25 школьников. Экзамен состоял из нескольких вопросов, на каждый из которых можно было дать один из пяти вариантов ответа. Оказалось, что любые два школьника не более чем на один вопрос ответили одинаково. Докажите, что в ЕГЭ было не более 6 вопросов.

3. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ – перестановка всех натуральных чисел от 1 до 100. Пусть $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $\ldots$, $S_{100} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$. Какое наибольшее количество точных квадратов может оказаться среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$?

4. Вдоль дороги стоят 100 пронумерованных подряд столбов, как-то покрашенных в три цвета. Мэр столбов не видит. Он может назвать пару номеров, и, если столбы разного цвета, их перекрасят в третий цвет, а если одинакового – то так и оставляют. О результате мэру докладывают туфту, которой опытный мэр не доверяет. Всегда ли мэр может с помощью таких операций добиться, чтобы в какой-то момент все столбы стали одинакового цвета?

5. Найдите все $k > 0$, при которых существует строго убывающая функция $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такая, что при всех положительных x справедливо неравенство $g(x) \geqslant kg(x + g(x))$.

6. Пусть n – натуральное число, а k – количество простых чисел, не превосходящих n. Множество A, состоящее менее чем из k натуральных чисел, не превосходящих n, таково, что ни один его элемент не делится на другой. Докажите, что существует множество B, состоящее из k натуральных чисел, не превосходящих n, содержащее в себе множество A, такое, что ни один его элемент не делится на другой.

7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что на плоскости существует квадрат $A'B'C'D'$ такой, что $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$, $D \neq D'$, и прямые AA', BB', CC', DD' пересекаются в одной точке.