11 класс — Комбинаторная геометрия — 18 января 2016

1. На плоскости расположено n точек ($n > 3$), никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что среди треугольников с вершинами в данных точках, остроугольные треугольники составляют не более трех четвертей.

2. Правильный $(2n + 1)$–угольник разбили диагоналями на $2n - 1$ треугольник. Докажите, что среди них по крайней мере три равнобедренных.

3. На плоскости дано множество из $n \geqslant 9$ точек. Для любых 9 его точек можно выбрать две окружности так, что все эти точки окажутся на выбранных окружностях. Докажите, что все n точек лежат на двух окружностях.

4. Длина наибольшей стороны треугольника равна 1. Докажите, что три круга радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ с центрами в вершинах покрывают весь треугольник.

5. В выпуклом многоугольнике на плоскости содержится не меньше $m^2 + 1$ точек с целыми координатами. Докажите, что в нем найдется $m + 1$ точек с целыми координатами, которые лежат на одной прямой.

6. Докажите, что три выпуклых многоугольника на плоскости нельзя пересечь одной прямой тогда и только тогда, когда каждый многоугольник можно отделить от двух других прямой (т.е. существует прямая такая, что этот многоугольник и два остальных лежат по разные ее стороны).

7. На плоскости дано несколько равных параллельно расположенных квадратов, причем среди любых n из них два имеют общую точку. Доказать, что эти квадраты можно разбить на не более чем $2n - 1$ подсистем, в каждой из которых все квадраты имеют общую точку.

8. На плоскости отмечено несколько точек. Для любых трех из них существует декартова система координат (т.е. перпендикулярные оси и общий масштаб), в которой эти точки имеют целые координаты. Докажите, что существует декартова система координат, в которой все отмеченные точки имеют целые координаты.

9. На плоскости нарисовано некоторое семейство S правильных треугольников, получающихся друг из друга параллельными переносами, причем любые два треугольника пересекаются. Докажите, что найдутся три точки такие, что любой треугольник семейства S содержит хотя бы одну из них.

11 класс	Комбинаторная геометрия	18 января 2016

1. На плоскости расположено n точек ($n > 3$), никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что среди треугольников с вершинами в данных точках, остроугольные треугольники составляют не более трех четвертей.

2. Правильный $(2n+1)$–угольник разбили диагоналями на $2n-1$ треугольник. Докажите, что среди них по крайней мере три равнобедренных.

3. На плоскости дано множество из $n \geqslant 9$ точек. Для любых 9 его точек можно выбрать две окружности так, что все эти точки окажутся на выбранных окружностях. Докажите, что все n точек лежат на двух окружностях.

4. Длина наибольшей стороны треугольника равна 1. Докажите, что три круга радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ с центрами в вершинах покрывают весь треугольник.

5. В выпуклом многоугольнике на плоскости содержится не меньше m^2+1 точек с целыми координатами. Докажите, что в нем найдется $m+1$ точек с целыми координатами, которые лежат на одной прямой.

6. Докажите, что три выпуклых многоугольника на плоскости нельзя пересечь одной прямой тогда и только тогда, когда каждый многоугольник можно отделить от двух других прямой (т.е. существует прямая такая, что этот многоугольник и два остальных лежат по разные ее стороны).

7. На плоскости дано несколько равных параллельно расположенных квадратов, причем среди любых n из них два имеют общую точку. Доказать, что эти квадраты можно разбить на не более чем $2n-1$ подсистем, в каждой из которых все квадраты имеют общую точку.

8. На плоскости отмечено несколько точек. Для любых трех из них существует декартова система координат (т.е. перпендикулярные оси и общий масштаб), в которой эти точки имеют целые координаты. Докажите, что существует декартова система координат, в которой все отмеченные точки имеют целые координаты.

9. На плоскости нарисовано некоторое семейство S правильных треугольников, получающихся друг из друга параллельными переносами, причем любые два треугольника пересекаются. Докажите, что найдутся три точки такие, что любой треугольник семейства S содержит хотя бы одну из них.