1. В прямоугольной таблице 9×9 отмечены 40 клеток. Горизонтальный или вертикальный ряд из 9 клеток называется *хорошим*, если в нем отмеченных клеток больше, чем не отмеченных. Какое наибольшее количество хороших (горизонтальных и вертикальных) рядов может иметь данная таблица?

2. Квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет два различных корня. Оказалось, что для любых чисел a и b верно неравенство $f(a^2+b^2) > f(2ab)$. Докажите, что хотя бы один из корней трёхчлена – отрицательный.

3. На новогодний вечер пришли несколько супружеских пар, у каждой из которых было от 1 до 10 детей. Дед Мороз выбирал одного ребёнка, одну маму и одного папу из трёх разных семей и катал их в санях. Оказалось, что у него было ровно 3630 способов выбрать нужную тройку людей. Сколько всего могло быть детей на этом вечере?

4. При каком наибольшем n возможно разложить 111 монет по клеткам квадратной доски $n\times n$ так, чтобы количества монет в любых двух соседних по стороне клетках отличались ровно на 1? (В клетках может быть по нескольку монет или не быть их вообще.)

5. Найдите все натуральные k такие, что при каждом нечётном $n > 100$ число $20^n + 13^n$ делится на k.

6. В окружность ω вписан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB > BC$. Пусть P и Q – середины меньшей и большей дуг AC окружности ω соответственно. Пусть M – основание перпендикуляра, опущенного из Q на отрезок AB. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC, делит пополам отрезок BP.

7. По кругу расставлено 300 положительных чисел. Могло ли случиться так, что каждое из этих чисел, кроме одного, равно разности своих соседей?

8. Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается число 4 или 5, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 2. Сколько последовательностей ему придётся выписать?

9. Плоскость α пересекает ребра AB, BC, CD и DA треугольной пирамиды $ABCD$ в точках K, L, M и N соответственно. Оказалось, что двугранные углы $\angle(KLA, KLM)$, $\angle(LMB, LMN)$, $\angle(MNC, MNK)$ и $\angle(NKD, NKL)$ равны. Докажите, что проекции вершин A, B, C и D на плоскость α лежат на одной окружности.

11 класс	Готовимся к регионалке	14 января 2016

1. В прямоугольной таблице 9×9 отмечены 40 клеток. Горизонтальный или вертикальный ряд из 9 клеток называется *хорошим*, если в нем отмеченных клеток больше, чем не отмеченных. Какое наибольшее количество хороших (горизонтальных и вертикальных) рядов может иметь данная таблица?

2. Квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет два различных корня. Оказалось, что для любых чисел a и b верно неравенство $f(a^2+b^2) > f(2ab)$. Докажите, что хотя бы один из корней трёхчлена – отрицательный.

3. На новогодний вечер пришли несколько супружеских пар, у каждой из которых было от 1 до 10 детей. Дед Мороз выбирал одного ребёнка, одну маму и одного папу из трёх разных семей и катал их в санях. Оказалось, что у него было ровно 3630 способов выбрать нужную тройку людей. Сколько всего могло быть детей на этом вечере?

4. При каком наибольшем n возможно разложить 111 монет по клеткам квадратной доски $n\times n$ так, чтобы количества монет в любых двух соседних по стороне клетках отличались ровно на 1? (В клетках может быть по нескольку монет или не быть их вообще.)

5. Найдите все натуральные k такие, что при каждом нечётном $n > 100$ число $20^n + 13^n$ делится на k.

6. В окружность ω вписан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB > BC$. Пусть P и Q – середины меньшей и большей дуг AC окружности ω соответственно. Пусть M – основание перпендикуляра, опущенного из Q на отрезок AB. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC, делит пополам отрезок BP.

7. По кругу расставлено 300 положительных чисел. Могло ли случиться так, что каждое из этих чисел, кроме одного, равно разности своих соседей?

8. Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается число 4 или 5, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 2. Сколько последовательностей ему придётся выписать?

9. Плоскость α пересекает ребра AB, BC, CD и DA треугольной пирамиды $ABCD$ в точках K, L, M и N соответственно. Оказалось, что двугранные углы $\angle(KLA, KLM)$, $\angle(LMB, LMN)$, $\angle(MNC, MNK)$ и $\angle(NKD, NKL)$ равны. Докажите, что проекции вершин A, B, C и D на плоскость α лежат на одной окружности.