11 класс

Добавка

14 января 2016

1. В окружности проведено 2016 хорд. Оказалось, что через середину любой хорды проходит хотя бы одна из других хорд. Докажите, что хотя бы одна из хорд проходит через центр.

2. Сколько всего различных чисел в последовательности $\left[\frac{1^2}{2016}\right], \left[\frac{2^2}{2016}\right], \ldots, \left[\frac{2016^2}{2016}\right]$?

3. На бесконечной шахматной доске находятся ферзь и невидимый король, которому запрещено ходить по диагонали. Они ходят по очереди. Сможет ли ферзь объявить королю шах (возможно, и не догадываясь об этом)?

4. Множество клеток таблицы 2016×2016 назовём *интересным*, если в каждой строке и каждом столбце таблицы есть хотя бы две клетки этого множества. Какое наибольшее количество клеток может быть в интересном множестве, которое перестаёт быть интересным при удалении любой из его клеток?

5. Целые числа m и n таковы, что $0 \leqslant m \leqslant 2n$. Докажите, что число $2^{2n+2} + 2^{m+2} + 1$ является точным квадратом тогда и только тогда, когда $m = n$.

6. Точки P и Q выбраны на стороне BC остроугольного треугольника ABC так, что $\angle PAB = \angle BCA$ и $\angle CAQ = \angle ABC$. Точки M и N выбраны на прямых AP и AQ соответственно так, что P – середина отрезка AM, а Q – середина отрезка AN. Докажите, что прямые BM и CN пересекаются на окружности, описанной около треугольника ABC.

7. В школе изучаются $2n$ предметов, а ученики получают только двойки и тройки. Известно, что никакие два ученика не учатся одинаково, и ни про каких двух учеников нельзя сказать, что один учится лучше другого (т.е. по всем предметам не хуже и хотя бы по одному предмету лучше). Какое наибольшее количество учеников может быть в такой школе?

11 класс

Добавка

14 января 2016

1. В окружности проведено 2016 хорд. Оказалось, что через середину любой хорды проходит хотя бы одна из других хорд. Докажите, что хотя бы одна из хорд проходит через центр.

2. Сколько всего различных чисел в последовательности $\left[\frac{1^2}{2016}\right], \left[\frac{2^2}{2016}\right], \ldots, \left[\frac{2016^2}{2016}\right]$?

3. На бесконечной шахматной доске находятся ферзь и невидимый король, которому запрещено ходить по диагонали. Они ходят по очереди. Сможет ли ферзь объявить королю шах (возможно, и не догадываясь об этом)?

4. Множество клеток таблицы 2016×2016 назовём *интересным*, если в каждой строке и каждом столбце таблицы есть хотя бы две клетки этого множества. Какое наибольшее количество клеток может быть в интересном множестве, которое перестаёт быть интересным при удалении любой из его клеток?

5. Целые числа m и n таковы, что $0 \leqslant m \leqslant 2n$. Докажите, что число $2^{2n+2} + 2^{m+2} + 1$ является точным квадратом тогда и только тогда, когда $m = n$.

6. Точки P и Q выбраны на стороне BC остроугольного треугольника ABC так, что $\angle PAB = \angle BCA$ и $\angle CAQ = \angle ABC$. Точки M и N выбраны на прямых AP и AQ соответственно так, что P – середина отрезка AM, а Q – середина отрезка AN. Докажите, что прямые BM и CN пересекаются на окружности, описанной около треугольника ABC.

7. В школе изучаются $2n$ предметов, а ученики получают только двойки и тройки. Известно, что никакие два ученика не учатся одинаково, и ни про каких двух учеников нельзя сказать, что один учится лучше другого (т.е. по всем предметам не хуже и хотя бы по одному предмету лучше). Какое наибольшее количество учеников может быть в такой школе?