11 класс	Производящие функции – 2	17 декабря 2015

Напоминание 1. Выражения вида $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ называются *формальными степенными рядами.* Их можно складывать, вычитать, умножать, делить и дифференцировать, не беспокоясь об их сходимости.

Напоминание 2. Пусть $\{a_n\} = a_0, a_1, \ldots$ – числовая последовательность. Формальный степенной ряд $F(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$ называется *производящей функцией* этой последовательности.

1. а) $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ – числа Фибоначчи. Найдите производящую функцию $f(x)$ чисел Фибоначчи, заметив, что $f(x) = x + xf(x) + x^2f(x)$.

б) Пусть $\{F_k\}$ – последовательность, где $F_0 = 0, F_1 = 1$, а каждый член, начиная со второго, равен сумме всех предыдущих. Найдите производящую функцию ряда F_k.

в) Пусть $\{F_k\}$ – последовательность, где $F_0 = 0, F_1 = F_2 = F_3 = 1$, а каждый член, начиная с четвёртого, равен сумме всех предыдущих с номерами, дающими такой же остаток при делении на 3. Найдите производящую функцию ряда F_k.

2. Найдите производящую функцию последовательности $\{a_n\}$, где $a_0 = 0, a_1 = 1$, и для любого натурального $n > 1$ верно $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + (-2)^n$. Разложите полученную функцию в сумму дробей с линейными знаменателями, затем разложите эти дроби обратно в ряды, ну и наконец найдите явную формулу для a_n.

3. а) Найдите производящую функцию $\sum L(m,n)x^my^n$, где $L(m,n)$ – количество способов прохода фигуры, ходящей вправо или вверх из нижнего левого узла в правый верхний узел доски $m \times n$.

б) Найдите производящую функцию $\sum V(m,n)x^my^n$, где $V(m,n)$ – количество способов прохода фигуры, ходящей вправо, вверх или вправо-вверх из нижнего левого узла в правый верхний узел доски $m \times n$.

в) Найдите разность между количествами путей с чётным числом диагоналей и с нечётным фигуры из пункта **б)**.

4. Найдите сумму **а)** $\sum\limits_{i=0}^{k} C_n^{2i} \cdot C_n^{2k-2i}$; **б)** $\sum\limits_{i=0}^{n} C_{2i}^{i} \cdot C_{2n-2i}^{n-i}$.

5. Два различных набора натуральных чисел $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ таковы, что наборы $A + A = \{a_i + a_j, i \neq j\}$ и $B + B = \{b_i + b_j, i \neq j\}$ совпадают (в наборе, в отличие от множества, некоторые числа могут встречаться несколько раз). Докажите, что n — степень двойки.

11 класс	Производящие функции – 2	17 декабря 2015

Напоминание 1. Выражения вида $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ называются *формальными степенными рядами.* Их можно складывать, вычитать, умножать, делить и дифференцировать, не беспокоясь об их сходимости.

Напоминание 2. Пусть $\{a_n\} = a_0, a_1, \ldots$ – числовая последовательность. Формальный степенной ряд $F(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$ называется *производящей функцией* этой последовательности.

1. а) $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ – числа Фибоначчи. Найдите производящую функцию $f(x)$ чисел Фибоначчи, заметив, что $f(x) = x + xf(x) + x^2f(x)$.

б) Пусть $\{F_k\}$ – последовательность, где $F_0 = 0, F_1 = 1$, а каждый член, начиная со второго, равен сумме всех предыдущих. Найдите производящую функцию ряда F_k.

в) Пусть $\{F_k\}$ – последовательность, где $F_0 = 0, F_1 = F_2 = F_3 = 1$, а каждый член, начиная с четвёртого, равен сумме всех предыдущих с номерами, дающими такой же остаток при делении на 3. Найдите производящую функцию ряда F_k.

2. Найдите производящую функцию последовательности $\{a_n\}$, где $a_0 = 0, a_1 = 1$, и для любого натурального $n > 1$ верно $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + (-2)^n$. Разложите полученную функцию в сумму дробей с линейными знаменателями, затем разложите эти дроби обратно в ряды, ну и наконец найдите явную формулу для a_n.

3. а) Найдите производящую функцию $\sum L(m,n)x^my^n$, где $L(m,n)$ – количество способов прохода фигуры, ходящей вправо или вверх из нижнего левого узла в правый верхний узел доски $m \times n$.

б) Найдите производящую функцию $\sum V(m,n)x^my^n$, где $V(m,n)$ – количество способов прохода фигуры, ходящей вправо, вверх или вправо-вверх из нижнего левого узла в правый верхний узел доски $m \times n$.

в) Найдите разность между количествами путей с чётным числом диагоналей и с нечётным фигуры из пункта **б)**.

4. Найдите сумму **а)** $\sum\limits_{i=0}^{k} C_n^{2i} \cdot C_n^{2k-2i}$; **б)** $\sum\limits_{i=0}^{n} C_{2i}^{i} \cdot C_{2n-2i}^{n-i}$.

5. Два различных набора натуральных чисел $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ таковы, что наборы $A + A = \{a_i + a_j, i \neq j\}$ и $B + B = \{b_i + b_j, i \neq j\}$ совпадают (в наборе, в отличие от множества, некоторые числа могут встречаться несколько раз). Докажите, что n — степень двойки.