11 класс	Производящие функции	10 декабря 2015

Определение. Выражения вида $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ называются *формальными степенными рядами.*

Формальные степенные ряды можно складывать, вычитать, умножать, делить и дифференцировать, не беспокоясь об их сходимости.

Определение. *Производной* формального степенного ряда $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ называется ряд $F(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$

1. Найдите произведения следующих формальных степенных рядов:
а) $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)$, **б)** $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)$.

2. Докажите, что если $a_0 \neq 0$, то для ряда $F(x)$ существует ряд $F^{-1}(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n + \ldots$ такой, что $F(x)F^{-1}(x) = 1$.

3. Вычислите ряды (т.е. найдите их коэффициенты) функций **а)** $(1 + x)^{-1}$, **б)** $(1 - x)^{-2}$.

Определение. Пусть $\{a_n\} = a_0, a_1, \ldots$ – числовая последовательность. Формальный степенной ряд $F(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$ называется *производящей функцией* этой последовательности.

4. Вычислите производящие функции следующих последовательностей (выразите их как конечные выражения, т.е. замкнутые функции от x):
а) $a_n = 1$, **б)** $a_n = C_m^n$, **в)** $a_n = n$, **г)** $a_n = n^2$.

5. Пусть P_n – число способов разменять сумму n копеек монетами **а)** 5 копеек, **б)** 1, 5 копеек, **в)** 1, 5, 10, 50 копеек. Найдите производящую функцию для P_n.

6. Вычислите суммы
а) $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n$,
б) $C_n^1 + 2^2C_n^2 + 3^2C_n^3 \ldots + n^2C_n^n$,
в) $C_n^0 + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1}$,
г) $\frac{C_n^0}{2} + \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{4} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+2}$.

7. Есть миллион автобусных билетов с номерами от 000000 до 999999. Билет называется *счастливым*, если сумма первых трёх его цифр равна сумме трёх последних. Пусть N – количество счастливых билетов.
а) Докажите, что $(1 + x + \ldots + x^9)^3(1 + x^{-1} + \ldots + x^{-9})^3 = x^{27} + \ldots + a_1x + N + a_1x^{-1} + \ldots + x^{-27}$.
б) Докажите, что $(1 + x + \ldots + x^9)^6 = 1 + \ldots + Nx^{27} + \ldots + x^{54}$.
в) Найдите количество счастливых билетов.

8. Найдите производящую функцию последовательности Фибоначчи $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ и с её помощью докажите формулу Бине для чисел Фибоначчи.

9. а) Докажите, что коэффициент a_k при степени k производящей функции $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ldots$ равен количеству разбиений числа k на различные натуральные слагаемые без учёта порядка.

б) Найдите производящую функцию ряда b_k – количества разбиений числа k на натуральные слагаемые с учётом порядка;

в) Найдите производящую функцию ряда c_k – количества разбиений числа k на натуральные слагаемые без учёта порядка;

г) Найдите производящую функцию ряда d_k – количества разбиений числа k на нечётные натуральные слагаемые без учёта порядка;

д) Докажите, что $a_k = d_k$.

10. а) Пусть $C(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_nz^n$ – производящая функция последовательности чисел Каталана $\{C_n\}$. Докажите, что $C(z) = zC^2(z) + 1$ и найдите явный вид функции $C(z)$.

б) Выведите формулу для чисел Каталана, воспользовавшись равенством $(1 - z)^{1/2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{1/2}^n(-z)^n$, где $C_{1/2}^n$ – обобщённые биномиальные коэффициенты: $C_{1/2}^n = \frac{(1/2)(1/2-1)\ldots(1/2-n+1)}{n!}$.

11 класс	Производящие функции	10 декабря 2015

Определение. Выражения вида $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ называются *формальными степенными рядами.*

Формальные степенные ряды можно складывать, вычитать, умножать, делить и дифференцировать, не беспокоясь об их сходимости.

Определение. *Производной* формального степенного ряда $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ называется ряд $F(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$

1. Найдите произведения следующих формальных степенных рядов:
а) $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)$, **б)** $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)$.

2. Докажите, что если $a_0 \neq 0$, то для ряда $F(x)$ существует ряд $F^{-1}(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n + \ldots$ такой, что $F(x)F^{-1}(x) = 1$.

3. Вычислите ряды (т.е. найдите их коэффициенты) функций **а)** $(1 + x)^{-1}$, **б)** $(1 - x)^{-2}$.

Определение. Пусть $\{a_n\} = a_0, a_1, \ldots$ – числовая последовательность. Формальный степенной ряд $F(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$ называется *производящей функцией* этой последовательности.

4. Вычислите производящие функции следующих последовательностей (выразите их как конечные выражения, т.е. замкнутые функции от x):
а) $a_n = 1$, **б)** $a_n = C_m^n$, **в)** $a_n = n$, **г)** $a_n = n^2$.

5. Пусть P_n – число способов разменять сумму n копеек монетами **а)** 5 копеек, **б)** 1, 5 копеек, **в)** 1, 5, 10, 50 копеек. Найдите производящую функцию для P_n.

6. Вычислите суммы
а) $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n$,
б) $C_n^1 + 2^2C_n^2 + 3^2C_n^3 \ldots + n^2C_n^n$,
в) $C_n^0 + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1}$,
г) $\frac{C_n^0}{2} + \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{4} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+2}$.

7. Есть миллион автобусных билетов с номерами от 000000 до 999999. Билет называется *счастливым*, если сумма первых трёх его цифр равна сумме трёх последних. Пусть N – количество счастливых билетов.
а) Докажите, что $(1 + x + \ldots + x^9)^3(1 + x^{-1} + \ldots + x^{-9})^3 = x^{27} + \ldots + a_1x + N + a_1x^{-1} + \ldots + x^{-27}$.
б) Докажите, что $(1 + x + \ldots + x^9)^6 = 1 + \ldots + Nx^{27} + \ldots + x^{54}$.
в) Найдите количество счастливых билетов.

8. Найдите производящую функцию последовательности Фибоначчи $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ и с её помощью докажите формулу Бине для чисел Фибоначчи.

9. а) Докажите, что коэффициент a_k при степени k производящей функции $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ldots$ равен количеству разбиений числа k на различные натуральные слагаемые без учёта порядка.

б) Найдите производящую функцию ряда b_k – количества разбиений числа k на натуральные слагаемые с учётом порядка;

в) Найдите производящую функцию ряда c_k – количества разбиений числа k на натуральные слагаемые без учёта порядка;

г) Найдите производящую функцию ряда d_k – количества разбиений числа k на нечётные натуральные слагаемые без учёта порядка;

д) Докажите, что $a_k = d_k$.

10. а) Пусть $C(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_nz^n$ – производящая функция последовательности чисел Каталана $\{C_n\}$. Докажите, что $C(z) = zC^2(z) + 1$ и найдите явный вид функции $C(z)$.

б) Выведите формулу для чисел Каталана, воспользовавшись равенством $(1 - z)^{1/2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{1/2}^n(-z)^n$, где $C_{1/2}^n$ – обобщённые биномиальные коэффициенты: $C_{1/2}^n = \frac{(1/2)(1/2-1)\ldots(1/2-n+1)}{n!}$.