11 класс	Ещё линейность	7 декабря 2015

1. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка P. В углы A и C вписываются окружности наименьшего возможного радиуса, проходящие через точку P. Докажите, что прямые, соединяющие центры этих окружностей, для разных P параллельны друг другу.

2. Через вершины B и C треугольника ABC проводится окружность, которая второй раз пересекает стороны AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Пусть H и H_1 — ортоцентры треугольников ABC и AB_1C_1. Докажите, что прямые BB_1, CC_1 и HH_1 пересекаются в одной точке.

3. O — центр описанной окружности треугольника ABC. На луче AO выбрана произвольная точка P. Описанные окружности треугольников APB и APC пересекают прямые AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что середина B_1C_1 равноудалена от точек B и C.

4. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке M, причем $\angle AMD = 120°$, $AM = MD$. На стороне BC выбрана произвольная точка E, через нее проведены прямые, параллельные диагоналям, которые пересекают четырехугольник второй раз в точках P и Q. Докажите, что центр описанной окружности треугольника PEQ лежит на прямой AD.

5. Из ортоцентра H треугольника ABC опущены перпендикуляры на внутреннюю и внешнюю биссектрисы угла B. Пусть P и Q — основания этих перпендикуляров. Докажите, что PQ делит сторону AC пополам.

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. На дуге ABC описанной окружности треугольника ABC выбрана произвольная точка D. Прямые AD и CC_1 пересекаются в точке P, а прямые CD и AA_1 пересекаются в точке Q. Докажите, что прямая A_1B_1 делит отрезок PQ пополам.

7. Докажите, что середины отрезков, соединяющих основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки плоскости на пары противоположных сторон или диагоналей вписанного четырехугольника, лежат на одной прямой.

1. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка P. В углы A и C вписываются окружности наименьшего возможного радиуса, проходящие через точку P. Докажите, что прямые, соединяющие центры этих окружностей, для разных P параллельны друг другу.

2. Через вершины B и C треугольника ABC проводится окружность, которая второй раз пересекает стороны AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Пусть H и H_1 — ортоцентры треугольников ABC и AB_1C_1. Докажите, что прямые BB_1, CC_1 и HH_1 пересекаются в одной точке.

3. O — центр описанной окружности треугольника ABC. На луче AO выбрана произвольная точка P. Описанные окружности треугольников APB и APC пересекают прямые AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что середина B_1C_1 равноудалена от точек B и C.

4. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке M, причем $\angle AMD = 120°$, $AM = MD$. На стороне BC выбрана произвольная точка E, через нее проведены прямые, параллельные диагоналям, которые пересекают четырехугольник второй раз в точках P и Q. Докажите, что центр описанной окружности треугольника PEQ лежит на прямой AD.

5. Из ортоцентра H треугольника ABC опущены перпендикуляры на внутреннюю и внешнюю биссектрисы угла B. Пусть P и Q — основания этих перпендикуляров. Докажите, что PQ делит сторону AC пополам.

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. На дуге ABC описанной окружности треугольника ABC выбрана произвольная точка D. Прямые AD и CC_1 пересекаются в точке P, а прямые CD и AA_1 пересекаются в точке Q. Докажите, что прямая A_1B_1 делит отрезок PQ пополам.

7. Докажите, что середины отрезков, соединяющих основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки плоскости на пары противоположных сторон или диагоналей вписанного четырехугольника, лежат на одной прямой.