11 класс | **Метод спуска** | 3 декабря 2015

**0.** Докажите, что уравнение $x^3 + 7y^3 + 49z^3 = 0$ не имеет нетривиальных решений в целых числах.

**1.** Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2xyzt$ имеет в целых числах только нулевое решение.

**2.** Найдите все целочисленные решения уравнения $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$.

**3. а)** Имеется 101 корова, каждая весит целое число грамм. Известно, что любые 100 из них можно разбить на 2 стада одинакового веса, по 50 коров в каждом. Докажите, что все коровы весят одинаково.

**б)** А если веса всех коров рациональны?

**4. Теорема Лагранжа.** Каждое натуральное число является суммой четырёх квадратов.

**а)** Докажите, что $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(m^2 + n^2 + k^2 + l^2)$ есть сумма четырёх квадратов.

**б)** Докажите, что при простом $p$ сравнение $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ имеет решения.

**в)** Докажите, что если число $mp$ при $1 < m < p$ является суммой четырёх квадратов, то для некоторого $0 < n < m$ число $np$ является суммой четырёх квадратов.

**5.** Можно ли разрезать куб на несколько различных кубиков?

**6.** На прямой отмечены $n$ красных и столько же синих точек. Докажите, что сумма попарных расстояний между одноцветными точками не превосходит суммы попарных расстояний между разноцветными точками.

**7.** На окружности расположено $n$ различных натуральных чисел. Каждую секунду между соседними числами записывается их среднее арифметическое, после чего старые числа стираются. Докажите, что через несколько шагов получится набор, в котором не все числа будут целыми.

**8.** По окружности стоят натуральные числа $a_1, \ldots, a_{128}$. Из них образуются новые числа по правилу $b_k = |a_{k+1} - a_k|$ $(a_{129} = a_1)$ и процесс повторяется. Докажите, что через несколько шагов все числа станут нулевыми.

11 класс | **Метод спуска** | 3 декабря 2015

**0.** Докажите, что уравнение $x^3 + 7y^3 + 49z^3 = 0$ не имеет нетривиальных решений в целых числах.

**1.** Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2xyzt$ имеет в целых числах только нулевое решение.

**2.** Найдите все целочисленные решения уравнения $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$.

**3. а)** Имеется 101 корова, каждая весит целое число грамм. Известно, что любые 100 из них можно разбить на 2 стада одинакового веса, по 50 коров в каждом. Докажите, что все коровы весят одинаково.

**б)** А если веса всех коров рациональны?

**4. Теорема Лагранжа.** Каждое натуральное число является суммой четырёх квадратов.

**а)** Докажите, что $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(m^2 + n^2 + k^2 + l^2)$ есть сумма четырёх квадратов.

**б)** Докажите, что при простом $p$ сравнение $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ имеет решения.

**в)** Докажите, что если число $mp$ при $1 < m < p$ является суммой четырёх квадратов, то для некоторого $0 < n < m$ число $np$ является суммой четырёх квадратов.

**5.** Можно ли разрезать куб на несколько различных кубиков?

**6.** На прямой отмечены $n$ красных и столько же синих точек. Докажите, что сумма попарных расстояний между одноцветными точками не превосходит суммы попарных расстояний между разноцветными точками.

**7.** На окружности расположено $n$ различных натуральных чисел. Каждую секунду между соседними числами записывается их среднее арифметическое, после чего старые числа стираются. Докажите, что через несколько шагов получится набор, в котором не все числа будут целыми.

**8.** По окружности стоят натуральные числа $a_1, \ldots, a_{128}$. Из них образуются новые числа по правилу $b_k = |a_{k+1} - a_k|$ $(a_{129} = a_1)$ и процесс повторяется. Докажите, что через несколько шагов все числа станут нулевыми.