11 класс — **Динамическая линейность** — 26 ноября 2015

Определение. Тело движется *линейно*, если существует такой вектор $\overrightarrow{v}$, что за время t каждая точка тела смещается на вектор $t \cdot \overrightarrow{v}$.

1. a) Точки A и B движутся линейно. Докажите, что середина отрезка AB движется линейно.

b) Три прямые движутся линейно. Сколько требуется моментов времени, в которые они пересекаются в одной точке, чтобы утверждать, что они всегда пересекаются в одной точке?

c) Точки A, B и C движутся линейно параллельно друг другу. Сколько требуется моментов времени, в которые они лежат на одной прямой, чтобы утверждать, что они всегда лежат на одной прямой?

d) На плоскости дан луч AC и точка B, не лежащая на этом луче. Точка C движется линейно по лучу AC. Докажите, что точка пересечения медиан, центр описанной окружности и ортоцентр треугольника ABC движутся линейно.

e) Точки A и B движутся линейно по пересекающимся прямым. Докажите, что прямая AB движется линейно тогда и только тогда, когда точки одновременно достигают точки пересечения прямых. Какое условие надо наложить, если прямые параллельны?

2. Из соображений линейности ориентированной площади выразите ориентированную площадь треугольника с вершинами $(0,0)$, (x_1, y_1), (x_2, y_2). С помощью этого выведите, что если точки A, B и C движутся линейно, то требуется три момента времени, в которые они лежат на одной прямой, чтобы утверждать, что они всегда лежат на одной прямой.

3. На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ выбраны точки M и N такие, что $BM = CN$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника AMN лежит на BD.

4. В треугольнике ABC проведены медианы BB_1 и CC_1. На стороне BC выбрана точка P, а на сторонах AB и AC выбраны точки M и N такие, что PM параллельно CC_1, а PN параллельно BB_1. Докажите, что отрезок MN делится медианами на три равные части.

5. Через точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника провели прямые, параллельные биссектрисам соответствующих углов. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

6. К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведены общая внутренняя касательная A_1A_2 и общая внешняя касательная B_1B_2, причем точки A_1 и B_1 лежат на ω_1, а A_2 и B_2 — на ω_2. Докажите, что точка пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 лежит на линии центров.

7. Еще раз докажите существование прямой Гаусса.

8. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Точка P лежит на описанной окружности треугольника ABH, где H — ортоцентр треугольника ABC. Прямые AP и BP пересекают стороны BC и AC в точках A' и B'. Найдите ГМТ середин отрезков $A'B'$.

11 класс	Динамическая линейность	26 ноября 2015

Определение. Тело движется *линейно*, если существует такой вектор $\overrightarrow{v}$, что за время t каждая точка тела смещается на вектор $t \cdot \overrightarrow{v}$.

1. a) Точки A и B движутся линейно. Докажите, что середина отрезка AB движется линейно.

b) Три прямые движутся линейно. Сколько требуется моментов времени, в которые они пересекаются в одной точке, чтобы утверждать, что они всегда пересекаются в одной точке?

c) Точки A, B и C движутся линейно параллельно друг другу. Сколько требуется моментов времени, в которые они лежат на одной прямой, чтобы утверждать, что они всегда лежат на одной прямой?

d) На плоскости дан луч AC и точка B, не лежащая на этом луче. Точка C движется линейно по лучу AC. Докажите, что точка пересечения медиан, центр описанной окружности и ортоцентр треугольника ABC движутся линейно.

e) Точки A и B движутся линейно по пересекающимся прямым. Докажите, что прямая AB движется линейно тогда и только тогда, когда точки одновременно достигают точки пересечения прямых. Какое условие надо наложить, если прямые параллельны?

2. Из соображений линейности ориентированной площади выразите ориентированную площадь треугольника с вершинами $(0, 0)$, (x_1, y_1), (x_2, y_2). С помощью этого выведите, что если точки A, B и C движутся линейно, то требуется три момента времени, в которые они лежат на одной прямой, чтобы утверждать, что они всегда лежат на одной прямой.

3. На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ выбраны точки M и N такие, что $BM = CN$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника AMN лежит на BD.

4. В треугольнике ABC проведены медианы BB_1 и CC_1. На стороне BC выбрана точка P, а на сторонах AB и AC выбраны точки M и N такие, что PM параллельно CC_1, а PN параллельно BB_1. Докажите, что отрезок MN делится медианами на три равные части.

5. Через точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника провели прямые, параллельные биссектрисам соответствующих углов. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

6. К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведены общая внутренняя касательная A_1A_2 и общая внешняя касательная B_1B_2, причем точки A_1 и B_1 лежат на ω_1, а A_2 и B_2 — на ω_2. Докажите, что точка пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 лежит на линии центров.

7. Еще раз докажите существование прямой Гаусса.

8. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Точка P лежит на описанной окружности треугольника ABH, где H — ортоцентр треугольника ABC. Прямые AP и BP пересекают стороны BC и AC в точках A' и B'. Найдите ГМТ середин отрезков $A'B'$.