Статическая линейность

Определение. Функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *линейной*, если существуют числа a, b и c такие, что $f(x, y) = ax + by + c$.

1. a) Даны точки A и B. Докажите, что ориентированное расстояние до прямой AB, ориентированная площадь треугольника с основанием AB — линейные функции.

b) Даны отрезки $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$. Найдите ГМТ X таких, что

$$\lambda_1 S_{A_1B_1X} + \lambda_2 S_{A_2B_2X} + \ldots + \lambda_n S_{A_nB_nX} = c$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, c$ — данные числа, а площадь считается ориентированной.

2. BB_1 и CC_1 — биссектрисы треугольника ABC. Докажите, что для всех точек отрезка B_1C_1 сумма расстояний до прямых AB и AC равна расстоянию до прямой BC.

3. Докажите, что основания внешних биссектрис лежат на одной прямой. Докажите, что основания внешних и внутренних биссектрис образуют полный четырехсторонник.

4. a) Внутри треугольника ABC нашли три точки K, M, N, не лежащие на одной прямой, такие что сумма расстояний от них до сторон постоянна. Докажите, что треугольник правильный.

b) Внутри четырехугольника $ABCD$ нашли три точки K, M, N, не лежащие на одной прямой, такие что сумма расстояний от них до сторон постоянна. Что можно утверждать в этом случае?

5. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке P, а сторон AD и BC — в точке Q. Пусть X, Y — точки пересечения биссектрис углов BAD и BCD, ABC и ADC, Z — точка пересечения внешних биссектрис углов APC и AQC. Докажите, что X, Y, Z лежат на одной прямой.

6. Докажите существование прямой Гаусса. Докажите, что если четырехугольник описанный, то прямая Гаусса проходит через центр вписанной окружности.

7. Точки пересечения медиан треугольников $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ лежат на одной прямой. Докажите, что 27 треугольников $A_iB_jC_k$ можно разбить на две группы так, чтобы суммы площадей треугольников в группам были одинаковыми.

Определение. Функция $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *линейной*, если существуют числа a, b и c такие, что $f(x,y) = ax + by + c$.

1. a) Даны точки A и B. Докажите, что ориентированное расстояние до прямой AB, ориентированная площадь треугольника с основанием AB — линейные функции.

b) Даны отрезки $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$. Найдите ГМТ X таких, что

$$\lambda_1 S_{A_1B_1X} + \lambda_2 S_{A_2B_2X} + \ldots + \lambda_n S_{A_nB_nX} = c$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, c$ — данные числа, а площадь считается ориентированной.

2. BB_1 и CC_1 — биссектрисы треугольника ABC. Докажите, что для всех точек отрезка B_1C_1 сумма расстояний до прямых AB и AC равна расстоянию до прямой BC.

3. Докажите, что основания внешних биссектрис лежат на одной прямой. Докажите, что основания внешних и внутренних биссектрис образуют полный четырехсторонник.

4. a) Внутри треугольника ABC нашли три точки K, M, N, не лежащие на одной прямой, такие что сумма расстояний от них до сторон постоянна. Докажите, что треугольник правильный.

b) Внутри четырехугольника $ABCD$ нашли три точки K, M, N, не лежащие на одной прямой, такие что сумма расстояний от них до сторон постоянна. Что можно утверждать в этом случае?

5. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке P, а сторон AD и BC — в точке Q. Пусть X, Y — точки пересечения биссектрис углов BAD и BCD, ABC и ADC, Z — точка пересечения внешних биссектрис углов APC и AQC. Докажите, что X, Y, Z лежат на одной прямой.

6. Докажите существование прямой Гаусса. Докажите, что если четырехугольник описанный, то прямая Гаусса проходит через центр вписанной окружности.

7. Точки пересечения медиан треугольников $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ лежат на одной прямой. Докажите, что 27 треугольников $A_iB_jC_k$ можно разбить на две группы так, чтобы суммы площадей треугольников в группам были одинаковыми.