11 класс | **Многочлены** | 29 октября 2015

1. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что многочлен $f^5(x) - f(x)$ имеет ровно три действительных корня. Найдите ординату вершины этого трёхчлена.

2. Найдите все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами такие, что $P(0) = 0$, а также для всех x справедливо $P((x+1)^3) = (P(x)+1)^3$.

3. Многочлен с целыми коэффициентами принимает значение -2 в четырёх целых точках. Докажите, что ни в одной целой точке он не принимает значение 2015.

4. $f(x) = x^2 + 12x + 30$. Решите уравнение $f(f(f(f(f(f(x)))))) = 0$.

5. Множество из миллиона последовательных натуральных чисел называется *необычным*, если его можно разбить на два множества так, что произведения в них равны. Докажите, что количество необычных множеств конечно.

Определение. Многочлен с коэффициентами из $\mathbb{K}$ называется *приводимым* над $\mathbb{K}$, если он представляется в виде произведения двух непостоянных многочленов с коэффициентами из $\mathbb{K}$. В противном случае многочлен называется *неприводимым* над $\mathbb{K}$.

К примеру, из основной теоремы алгебры следует, что любой многочлен с действительными коэффициентами выше 1-й степени приводим над $\mathbb{C}$, а любой многочлен выше 2-й степени приводим над $\mathbb{R}$.

6. Докажите, что неприводимые над $\mathbb{Q}$ многочлены второй и третьей степени не могут иметь общего (комплексного) корня.

7. $f(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что существует многочлен с целыми коэффициентами $g(x)$ такой, что $f(g(x))$ приводим над $\mathbb{Z}$.

8. Многочлены P и Q с действительными коэффициентами таковы, что $P(x) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow Q(x) \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $P + Q$ или $P - Q$ – константа.

11 класс | **Многочлены** | 29 октября 2015

1. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что многочлен $f^5(x) - f(x)$ имеет ровно три действительных корня. Найдите ординату вершины этого трёхчлена.

2. Найдите все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами такие, что $P(0) = 0$, а также для всех x справедливо $P((x+1)^3) = (P(x)+1)^3$.

3. Многочлен с целыми коэффициентами принимает значение -2 в четырёх целых точках. Докажите, что ни в одной целой точке он не принимает значение 2015.

4. $f(x) = x^2 + 12x + 30$. Решите уравнение $f(f(f(f(f(f(x)))))) = 0$.

5. Множество из миллиона последовательных натуральных чисел называется *необычным*, если его можно разбить на два множества так, что произведения в них равны. Докажите, что количество необычных множеств конечно.

Определение. Многочлен с коэффициентами из $\mathbb{K}$ называется *приводимым* над $\mathbb{K}$, если он представляется в виде произведения двух непостоянных многочленов с коэффициентами из $\mathbb{K}$. В противном случае многочлен называется *неприводимым* над $\mathbb{K}$.

К примеру, из основной теоремы алгебры следует, что любой многочлен с действительными коэффициентами выше 1-й степени приводим над $\mathbb{C}$, а любой многочлен выше 2-й степени приводим над $\mathbb{R}$.

6. Докажите, что неприводимые над $\mathbb{Q}$ многочлены второй и третьей степени не могут иметь общего (комплексного) корня.

7. $f(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что существует многочлен с целыми коэффициентами $g(x)$ такой, что $f(g(x))$ приводим над $\mathbb{Z}$.

8. Многочлены P и Q с действительными коэффициентами таковы, что $P(x) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow Q(x) \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $P + Q$ или $P - Q$ – константа.