

1. Диагонали  $AC$  и  $BD$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ . Оказалось, что  $MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD$ . Докажите, что  $\angle ACD = 2\angle ABD$ .

2. Депутаты Парламента образовали несколько комиссий не более чем из 10 человек каждая. Известно, что любые 11 комиссий имеют общего члена. Докажите, что все комиссии имеют общего члена.

3. Даны натуральные числа  $n$  и  $k$ . В каждой клетке доски  $n \times n$  стоит одно из чисел  $0, 1, 2, \dots, k$ . У каждой строки и каждого столбца имеется кнопка, при нажатии на которую все числа этой строки или этого столбца, меньшие  $k$ , увеличиваются на 1, а числа, равные  $k$ , заменяются нулём. Вначале во всех клетках стояли нули. После этого было сделано произвольное количество нажатий на кнопки. Докажите, что таблицу можно вернуть к исходному состоянию, нажав на кнопки не более  $2kn$  раз.

4. Найдите наибольшее действительное  $k$  такое, что любые положительные числа  $a, b, c$ , удовлетворяющие неравенству  $a^2 > bc$ , удовлетворяют также и неравенству  $(a^2 - bc)^2 > k(b^2 - ca)(c^2 - ab)$ .

1. Диагонали  $AC$  и  $BD$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ . Оказалось, что  $MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD$ . Докажите, что  $\angle ACD = 2\angle ABD$ .

2. Депутаты Парламента образовали несколько комиссий не более чем из 10 человек каждая. Известно, что любые 11 комиссий имеют общего члена. Докажите, что все комиссии имеют общего члена.

3. Даны натуральные числа  $n$  и  $k$ . В каждой клетке доски  $n \times n$  стоит одно из чисел  $0, 1, 2, \dots, k$ . У каждой строки и каждого столбца имеется кнопка, при нажатии на которую все числа этой строки или этого столбца, меньшие  $k$ , увеличиваются на 1, а числа, равные  $k$ , заменяются нулём. Вначале во всех клетках стояли нули. После этого было сделано произвольное количество нажатий на кнопки. Докажите, что таблицу можно вернуть к исходному состоянию, нажав на кнопки не более  $2kn$  раз.

4. Найдите наибольшее действительное  $k$  такое, что любые положительные числа  $a, b, c$ , удовлетворяющие неравенству  $a^2 > bc$ , удовлетворяют также и неравенству  $(a^2 - bc)^2 > k(b^2 - ca)(c^2 - ab)$ .

1. Диагонали  $AC$  и  $BD$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ . Оказалось, что  $MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD$ . Докажите, что  $\angle ACD = 2\angle ABD$ .

2. Депутаты Парламента образовали несколько комиссий не более чем из 10 человек каждая. Известно, что любые 11 комиссий имеют общего члена. Докажите, что все комиссии имеют общего члена.

3. Даны натуральные числа  $n$  и  $k$ . В каждой клетке доски  $n \times n$  стоит одно из чисел  $0, 1, 2, \dots, k$ . У каждой строки и каждого столбца имеется кнопка, при нажатии на которую все числа этой строки или этого столбца, меньшие  $k$ , увеличиваются на 1, а числа, равные  $k$ , заменяются нулём. Вначале во всех клетках стояли нули. После этого было сделано произвольное количество нажатий на кнопки. Докажите, что таблицу можно вернуть к исходному состоянию, нажав на кнопки не более  $2kn$  раз.

4. Найдите наибольшее действительное  $k$  такое, что любые положительные числа  $a, b, c$ , удовлетворяющие неравенству  $a^2 > bc$ , удовлетворяют также и неравенству  $(a^2 - bc)^2 > k(b^2 - ca)(c^2 - ab)$ .