11 класс	Случайное блуждание	19 октября

Определение 1. Будем называть ломаную $A_1A_2...A_n$ на координатной плоскости *траекторией случайного блуждания*, если $A_1 = (m, k)$, где m и k – целые и, если $A_i = (x, y)$, то $A_{i+1} = (x + 1, y + 1)$ или $A_{i+1} = (x + 1, y - 1)$. Число n будем называть длиной траектории, A_1 началом траектории, а A_n – концом. Будем называть траекторию *правильной*, если ее начало находится в точке $(0, 0)$.
Определение 2. Пусть ломаная $A_1A_2...A_n$ является траекторией случайного блуждания, $A_i = (x_i, y_i)$. Тогда уровнем этой траектории будем называть число

$$L(A_1A_2...A_n) = \max_{0\le i\le n}(y_i - y_0)$$

Определение 3. Обозначим $p(n, k)$ отношение числа правильных траекторий длины n, оканчивающихся в точке (n, k) и количества правильных траекторий длины n.
Определение 4. Обозначим $T(n, k)$ отношение числа правильных траекторий длины n уровня k, достигающих его впервые в конце траектории и количества правильных траекторий длины n.
Упражнение. Убедиться, что число правильных траекторий длины n равно 2^n.

1. Найти $p(n, k)$.

2. Принцип отражения.
Число траекторий, ведущих из точки $(0, a)$ в точку (n, b), пересекающих ось абцисс, равно числу траекторий, ведущих из точки $(0, -a)$ в точку (n, b).

3. Доказать, что $T(n, k) = \frac{p(n-1,k-1)-p(n-1,k+1)}{2}$.

4. Найти $T(2n, 2k)$.

5. Найти количество правильных траекторий длины n уровня m, проходящих через точку (n, k).

6. Найти количество правильных траекторий длины n уровня m.

7. Найти количество правильных траекторий длины n, не пересекающих ось абцисс, конец которых находится в точке (n, k).

8. Найти количество правильных траекторий длины n, конец которой впервые пересек ось абцисс.

9. * Найти предел отношения числа траекторий, найденных в предыдущей задаче, к числу правильных траекторий длины n, при $n \to \infty$.

Определение 1. Будем называть ломаную $A_1A_2...A_n$ на координатной плоскости *траекторией случайного блуждания*, если $A_1 = (m, k)$, где m и k – целые и, если $A_i = (x, y)$, то $A_{i+1} = (x+1, y+1)$ или $A_{i+1} = (x+1, y-1)$. Число n будем называть длиной траектории, A_1 началом траектории, а A_n – концом. Будем называть траекторию *правильной*, если ее начало находится в точке $(0, 0)$.
Определение 2. Пусть ломаная $A_1A_2...A_n$ является траекторией случайного блуждания, $A_i = (x_i, y_i)$. Тогда уровнем этой траектории будем называть число

$$L(A_1A_2...A_n) = \max_{0 \le i \le n}(y_i - y_0)$$

Определение 3. Обозначим $p(n, k)$ отношение числа правильных траекторий длины n, оканчивающихся в точке (n, k) и количества правильных траекторий длины n.
Определение 4. Обозначим $T(n, k)$ отношение числа правильных траекторий длины n уровня k, достигающих его впервые в конце траектории и количества правильных траекторий длины n.
Упражнение. Убедиться, что число правильных траекторий длины n равно 2^n.

1. Найти $p(n, k)$.

2. Принцип отражения.
Число траекторий, ведущих из точки $(0, a)$ в точку (n, b), пересекающих ось абцисс, равно числу траекторий, ведущих из точки $(0, -a)$ в точку (n, b).

3. Доказать, что $T(n, k) = \frac{p(n-1,k-1)-p(n-1,k+1)}{2}$.

4. Найти $T(2n, 2k)$.

5. Найти количество правильных траекторий длины n уровня m, проходящих через точку (n, k).

6. Найти количество правильных траекторий длины n уровня m.

7. Найти количество правильных траекторий длины n, не пересекающих ось абцисс, конец которых находится в точке (n, k).

8. Найти количество правильных траекторий длины n, конец которой впервые пересек ось абцисс.

9. * Найти предел отношения числа траекторий, найденных в предыдущей задаче, к числу правильных траекторий длины n, при $n \to \infty$.