11 класс **Разнобой** 8 октября 2015

**1.** 10 спортсменов провели турнир по настольному теннису в один круг. Докажите, что сумма квадратов количеств их побед равна сумме квадратов количеств их поражений.

**2.** Существует ли функция $f$, отличная от константы, такая, что для всех действительных $x$, для которых $\cos x \neq 0$, справедливо $f(\operatorname{tg} x) = f(\frac{1}{\cos x})$?

**3.** В окно комнаты светит солнце, а в комнате неподвижно висит в воздухе четырёхзвенная замкнутая ломаная. Её тень на стене имеет форму параллелограмма. Через некоторое время тень передвинулась, но по-прежнему осталась параллелограммом. Докажите, что и сама ломаная – параллелограмм. (Считайте, что солнечные лучи параллельны друг другу.)

**4.** Каждому из трёх мудрецов написали на лбу натуральное число, причём одно из этих чисел являлось суммой двух других, и сообщили им об этом. Мудрец не видит, что написано у него на лбу, но видит, что написано у двух других. Первый мудрец сказал, что не может догадаться, какое число написано у него на лбу. После этого то же самое сказал второй мудрец, а затем и третий. Тогда первый сказал: «Я знаю, что у меня на лбу написано число 50». Какие числа написаны у двух остальных?

**5.** Бесконечная последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ такова, что $a_1 = a$, $a_{n+1} = a^{a_n}$. $m$ – некоторое натуральное число. Докажите, что последовательность остатков при делении $a_n$ на $m$ стабилизируется (то есть, все остатки с какого-то момента станут одинаковыми).

**6.** В остроугольном неравнобедренном треугольнике $ABC$ отметили середины $C_1$, $B_1$, $A_1$ сторон $AB$, $AC$, $BC$ соответственно. Серединные перпендикуляры к $AB$ и $AC$ пересекают $AA_1$ в точках $B_2$, $C_2$ соответственно. Прямые $BB_2$ и $CC_2$ пересекаются в точке $X$, лежащей внутри треугольника. Докажите, что точки $A$, $B_1$, $C_1$, $X$ лежат на одной окружности.

**7.** Для натурального $n > 1$ рассмотрим множество $A = \{1, 2, 3, \dots 2^n\}$. Найдите количество подмножеств $B \subset A$ таких, что для любых двух различных чисел из $A$, сумма которых равна степени двойки, ровно одно из них принадлежит $B$.

11 класс **Разнобой** 8 октября 2015

**1.** 10 спортсменов провели турнир по настольному теннису в один круг. Докажите, что сумма квадратов количеств их побед равна сумме квадратов количеств их поражений.

**2.** Существует ли функция $f$, отличная от константы, такая, что для всех действительных $x$, для которых $\cos x \neq 0$, справедливо $f(\operatorname{tg} x) = f(\frac{1}{\cos x})$?

**3.** В окно комнаты светит солнце, а в комнате неподвижно висит в воздухе четырёхзвенная замкнутая ломаная. Её тень на стене имеет форму параллелограмма. Через некоторое время тень передвинулась, но по-прежнему осталась параллелограммом. Докажите, что и сама ломаная – параллелограмм. (Считайте, что солнечные лучи параллельны друг другу.)

**4.** Каждому из трёх мудрецов написали на лбу натуральное число, причём одно из этих чисел являлось суммой двух других, и сообщили им об этом. Мудрец не видит, что написано у него на лбу, но видит, что написано у двух других. Первый мудрец сказал, что не может догадаться, какое число написано у него на лбу. После этого то же самое сказал второй мудрец, а затем и третий. Тогда первый сказал: «Я знаю, что у меня на лбу написано число 50». Какие числа написаны у двух остальных?

**5.** Бесконечная последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ такова, что $a_1 = a$, $a_{n+1} = a^{a_n}$. $m$ – некоторое натуральное число. Докажите, что последовательность остатков при делении $a_n$ на $m$ стабилизируется (то есть, все остатки с какого-то момента станут одинаковыми).

**6.** В остроугольном неравнобедренном треугольнике $ABC$ отметили середины $C_1$, $B_1$, $A_1$ сторон $AB$, $AC$, $BC$ соответственно. Серединные перпендикуляры к $AB$ и $AC$ пересекают $AA_1$ в точках $B_2$, $C_2$ соответственно. Прямые $BB_2$ и $CC_2$ пересекаются в точке $X$, лежащей внутри треугольника. Докажите, что точки $A$, $B_1$, $C_1$, $X$ лежат на одной окружности.

**7.** Для натурального $n > 1$ рассмотрим множество $A = \{1, 2, 3, \dots 2^n\}$. Найдите количество подмножеств $B \subset A$ таких, что для любых двух различных чисел из $A$, сумма которых равна степени двойки, ровно одно из них принадлежит $B$.