11 класс	Последовательности	1 октября 2015

1. Дана последовательность $\{x_n\}$, в которой $x_1 = 1$ и $x_{n+1} = n \sin x_n + 1$ при всех $n \geqslant 1$. Докажите, что эта последовательность не является периодической (возможно, с предпериодом).

2. Последовательность положительных чисел $\{x_n\}$ удовлетворяет неравенствам $x_n^2 \leqslant x_n - x_{n+1}$ при всех $n \geqslant 1$. Докажите, что $x_n < 1/n$.

3. Докажите, что в последовательности $\{a_n\}$, заданной условиями $a_1 = 2$, $a_{n+1} = [3a_n/2]$, есть бесконечно много чётных и бесконечно много нечётных чисел.

4. Последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ такова, что для всех целых неотрицательных m и n $(m \geqslant n)$ выполняется соотношение $a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{a_{2m}+a_{2n}}{2}$. Найдите a_{2015}, если $a_1 = 1$.

5. Бесконечная строго возрастающая последовательность натуральных чисел такова, что $x_1 = 1$ и $x_{n+1} \leqslant 2n$. Докажите, что для любого n существуют члены этой последовательности x_i и x_j такие, что $x_i - x_j = n$.

6. Все члены бесконечных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – натуральные числа. Докажите, что существует такая пара номеров i и j, что $i \leqslant j$, $x_i \leqslant x_j$ и $y_i \leqslant y_j$.

7. Последовательность действительных чисел $a_0, a_1, \ldots$ определена следующим образом: $a_{i+1} = [a_i]\{a_i\}$ для всех $i \geqslant 0$. Докажите, что найдётся такое N, что $a_k = a_{k+2}$ при всех $k \geqslant N$.

8. Для какого наибольшего значения x_0 существует последовательность положительных чисел $x_0, x_1, \ldots, x_{2015}$, удовлетворяющая следующим условиям: $x_0 = x_{2015}$, $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$?

9. Докажите, что существует ровно одна последовательность целых чисел, удовлетворяющая свойствам: $a_1 = 1$, $a_2 > 1$, $a_{n+1}^3 + 1 = a_n a_{n+2}$ при всех натуральных n.

11 класс	Последовательности	1 октября 2015

1. Дана последовательность $\{x_n\}$, в которой $x_1 = 1$ и $x_{n+1} = n \sin x_n + 1$ при всех $n \geqslant 1$. Докажите, что эта последовательность не является периодической (возможно, с предпериодом).

2. Последовательность положительных чисел $\{x_n\}$ удовлетворяет неравенствам $x_n^2 \leqslant x_n - x_{n+1}$ при всех $n \geqslant 1$. Докажите, что $x_n < 1/n$.

3. Докажите, что в последовательности $\{a_n\}$, заданной условиями $a_1 = 2$, $a_{n+1} = [3a_n/2]$, есть бесконечно много чётных и бесконечно много нечётных чисел.

4. Последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ такова, что для всех целых неотрицательных m и n $(m \geqslant n)$ выполняется соотношение $a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{a_{2m}+a_{2n}}{2}$. Найдите a_{2015}, если $a_1 = 1$.

5. Бесконечная строго возрастающая последовательность натуральных чисел такова, что $x_1 = 1$ и $x_{n+1} \leqslant 2n$. Докажите, что для любого n существуют члены этой последовательности x_i и x_j такие, что $x_i - x_j = n$.

6. Все члены бесконечных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – натуральные числа. Докажите, что существует такая пара номеров i и j, что $i \leqslant j$, $x_i \leqslant x_j$ и $y_i \leqslant y_j$.

7. Последовательность действительных чисел $a_0, a_1, \ldots$ определена следующим образом: $a_{i+1} = [a_i]\{a_i\}$ для всех $i \geqslant 0$. Докажите, что найдётся такое N, что $a_k = a_{k+2}$ при всех $k \geqslant N$.

8. Для какого наибольшего значения x_0 существует последовательность положительных чисел $x_0, x_1, \ldots, x_{2015}$, удовлетворяющая следующим условиям: $x_0 = x_{2015}$, $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$?

9. Докажите, что существует ровно одна последовательность целых чисел, удовлетворяющая свойствам: $a_1 = 1$, $a_2 > 1$, $a_{n+1}^3 + 1 = a_n a_{n+2}$ при всех натуральных n.