11 класс	Реберная раскраска	28 сентября

Определение 1. Пусть дан граф G. Тогда будем обозначать множество его ребер $E(G)$, а множество его вершин – $V(G)$.
Определение 2. *Раскраской ребер* графа G в k цветов называется отображение $\rho : E(G) \to 1, 2, \ldots, k$. Будем говорить, что в раскраске ρ цвет i представлен в вершине v, если существо ребро, выходящее из v, покрашенное в цвет i. Количество цветов, представленных в вершине v, будем обозначать $\rho(v)$.
Определение 3. Будем говорить, что ρ – *оптимальная раскраска* ребер графа G в k цветов, если для любой другой раскраски ρ' ребер этого графа в k цветов выполняется неравенство

$$\sum_{v \in V(G)} \rho(v) \geqslant \sum_{v \in V(G)} \rho'(v).$$

Определение 4. Раскраска ребер графа G называется *правильной*, если любые два ребра, имеющие общий конец, покрашены в разные цвета.
Реберное хроматическое число графа $\chi'(G)$ – это наименьшее количество цветов, для которого существует правильная раскраска ребер графа G.

1. Пусть G – связный граф, $|V(G)|$ четно и в графе G отсутствуют вершины нечетной степени. Докажите, что ребра графа G можно покрасить в два цвета так, чтобы в каждой вершине были представлены оба цвета.

2. Пусть G – связный граф, отличный от цикла нечетной длины. Докажите, что ребра графа G можно покрасить в два цвета так, чтобы в каждой вершине степени не менее двух были представлены оба цвета.

3. Пусть ρ – оптимальная раскраска ребер графа G в k цветов. Вершина v и цвета i и j таковы, что в вершине v хотя бы два раза представлен цвет i и не представлен цвет j. Рассмотрим граф H, полученный из G удалением всех ребер, кроме цветов i, j. Докажите, что компонента связности графа H, содержащая вершину v, – простой цикл нечетной длины.

4. (D.König, 1916.) Пусть G – двудольный граф. Докажите, что $\chi'(G)$ равна наибольшей степени вершин графа G.

5. (R.P.Gupta, 1966.) Пусть G – двудольный граф, наименьшая степень степень вершин графа G равна d. Докажите, что существует покраска ребер графа G в d цветов, в которой в каждой вершине представлены d цветов.

6. Найти $\chi'(G)$, где G – полный граф на **а)** $2n$; **б)** $2n + 1$ вершинах.

7. Пусть G – граф, полученный из полного графа на $2n + 1$ вершине удалением не более чем $n - 1$ ребер. Докажите, что $\chi'(G) = 2n + 1$.

8. (В.Г.Визинг, 1964.)* Пусть G – граф без петель. Докажите, что $\chi'(G) \leqslant k + 1$, где k – наибольшая степень графа G.

11 класс	Реберная раскраска	28 сентября

Определение 1. Пусть дан граф G. Тогда будем обозначать множество его ребер $E(G)$, а множество его вершин – $V(G)$.

Определение 2. *Раскраской ребер* графа G в k цветов называется отображение $\rho : E(G) \to 1, 2, \ldots, k$. Будем говорить, что в раскраске ρ цвет i представлен в вершине v, если существо ребро, выходящее из v, покрашенное в цвет i. Количество цветов, представленных в вершине v, будем обозначать $\rho(v)$.

Определение 3. Будем говорить, что ρ – *оптимальная раскраска* ребер графа G в k цветов, если для любой другой раскраски ρ' ребер этого графа в k цветов выполняется неравенство

$$\sum_{v \in V(G)} \rho(v) \geqslant \sum_{v \in V(G)} \rho'(v).$$

Определение 4. Раскраска ребер графа G называется *правильной*, если любые два ребра, имеющие общий конец, покрашены в разные цвета.

Реберное хроматическое число графа $\chi'(G)$ – это наименьшее количество цветов, для которого существует правильная раскраска ребер графа G.

1. Пусть G – связный граф, $|V(G)|$ четно и в графе G отсутствуют вершины нечетной степени. Докажите, что ребра графа G можно покрасить в два цвета так, чтобы в каждой вершине были представлены оба цвета.

2. Пусть G – связный граф, отличный от цикла нечетной длины. Докажите, что ребра графа G можно покрасить в два цвета так, чтобы в каждой вершине степени не менее двух были представлены оба цвета.

3. Пусть ρ – оптимальная раскраска ребер графа G в k цветов. Вершина v и цвета i и j таковы, что в вершине v хотя бы два раза представлен цвет i и не представлен цвет j. Рассмотрим граф H, полученный из G удалением всех ребер, кроме цветов i, j. Докажите, что компонента связности графа H, содержащая вершину v, – простой цикл нечетной длины.

4. (D.König, 1916.) Пусть G – двудольный граф. Докажите, что $\chi'(G)$ равна наибольшей степени вершин графа G.

5. (R.P.Gupta, 1966.) Пусть G – двудольный граф, наименьшая степень степень вершин графа G равна d. Докажите, что существует покраска ребер графа G в d цветов, в которой в каждой вершине представлены d цветов.

6. Найти $\chi'(G)$, где G – полный граф на **а)** $2n$; **б)** $2n + 1$ вершинах.

7. Пусть G – граф, полученный из полного графа на $2n + 1$ вершине удалением не более чем $n - 1$ ребер. Докажите, что $\chi'(G) = 2n + 1$.

8. (В.Г.Визинг, 1964.)* Пусть G – граф без петель. Докажите, что $\chi'(G) \leqslant k + 1$, где k – наибольшая степень графа G.