11 класс **Линейные пространства** 24 сентября 2015

Определение. Пусть даны множества V ("векторы") и поле K ("числа", мы будем рассматривать $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$), имеются операции сложения векторов, для каждого числа имеется операция умножения вектора на число. При этом:

1) сложение ассоциативно, коммутативно, существует нейтральный по сложению элемент ($\overrightarrow{0}$) и у каждого вектора $\overrightarrow{v}$ есть обратный по сложению ($-\overrightarrow{v}$);

2) $1 \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$; $(k_1k_2)\overrightarrow{v} = k_1(k_2\overrightarrow{v})$ (здесь $k_1, k_2 \in K$, $\overrightarrow{v} \in V$);

3) $(k_1 + k_2)\overrightarrow{v} = k_1\overrightarrow{v} + k_2\overrightarrow{v}$; $k(\overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2) = k\overrightarrow{v}_1 + k\overrightarrow{v}_2$.

Тогда V называется *векторным (линейным)* пространством над K.

Примеры:

а) множество векторов на плоскости;

б) K^n – строки (или столбцы) длины n;

в) многочлены над полем K;

г) действительнозначные функции, определённые на произвольном множестве;

1. Образуют ли векторные пространства следующие множества (относительно естественных операций):

а) линейные уравнения вида $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$;

б) множество решений однородной СЛУ от n переменных;

в) многочлены степени $(2015!)^{2014!}$ над полем K;

г) $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$;

д) неубывающие последовательности над $\mathbb{R}$;

е) многочлены над данным полем с фиксированным корнем α;

ё) строки длины 100500 с нулевой суммой элементов;

ж) множество функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ над $\mathbb{Q}$;

з) множество функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ над $\mathbb{R}$;

Определение. Непустное подмножество S линейного пространства V называется *подпространством*, если оно само является линейным пространством.

2. Найдите все подпространства у пространства из примера б).

Определение. Выражение $\alpha_1v_1 + \dots + \alpha_nv_n$ (а также, в зависимости от контекста, и его значение), где $v_1, \dots, v_n \in V$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, называется *линейной комбинацией* векторов $v_1, \dots, v_n$. Говорят, что векторы $v_1, \dots, v_n \in V$ *линейно независимы*, если из равенства $\alpha_1v_1 + \dots + \alpha_nv_n = 0$ следует, что $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Бесконечное множество векторов называется линейно независимым, если любое конечное подмножество линейно независимо.

Определение. Пусть S – произвольное подмножество линейного пространства V. *Линейной оболочкой* $L(S)$ множества S в пространстве V называется совокупность $L(S)$ всех линейных комбинаций векторов из S.

3. Докажите, что линейная оболочка S является подпространством в V. Более того, любое подпространство V, содержащее S, содержит и $L(S)$.

Определение. Подмножество S линейного пространства V называется *базисом*, если оно линейно независимо и его линейная оболочка совпадает с V.

4. Найдите какой-нибудь базис пространств из примера в), 1её).

5. Пусть у линейного пространства существует базис, который содержит n (бесконечность) векторов. Докажите, что в любом другом базисе также будет n (бесконечность) векторов.

Определение.Количество векторов в базисе называется *размерностью* линейного пространства.

6. Пусть в конечномерном пространстве есть линейно независимая система векторов. Докажите, что ее можно дополнить до базиса.

7. СЛУ элементарными преобразованиями привели к ступенчатому виду. Докажите, что количество ненулевых уравнений не зависит от того, как это делали.