11 класс **Системы линейных уравнений** 21 сентября 2015

Рассмотрим систему линейных уравнений (СЛУ): $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

Две СЛУ от переменных $x_1, \dots, x_n$ назовем *эквивалентными*, если у них совпадают множества решений.

Рассмотрим следующие *элементарные преобразования*:

1) Поменять местами две строки;
2) Умножить строку на ненулевое число;
3) Прибавить к строке другую строку, умноженную на число.

1. a) Докажите, что если одну СЛУ можно получить из другой СЛУ при помощи последовательного применения элементарных преобразований, то они эквивалентны.

b) Верно ли обратное утверждение, то есть верно ли, что если есть две эквивалентные СЛУ с одинаковым числом уравнений и переменных, то одну из них можно получить из другой при помощи элементарных преобразований?

2. Докажите, что при помощи элементарных операций любую СЛУ можно привести к *ступенчатому виду*, то есть виду

$$\begin{cases} c_{1k}x_k + \dots\dots\dots + & c_{1n}x_n & = & d_1 \\ c_{2l}x_l + \dots\dots + & c_{2n}x_n & = & d_2 \\ \dots\dots\dots & & & \\ c_{rs}x_s + \dots + & c_{rn}x_n & = & d_r \\ & 0 & = & d_{r+1} \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & = & d_m \end{cases}$$

где $c_{1k}, c_{2l}, \dots, c_{rs} \neq 0$, $k < l < \dots < s$.

3. Пусть $\forall i, j$ выполнено $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$. Сколько решений в действительных числах может иметь СЛУ в случаях: 1) $m = n$; 2) $m < n$; 3) $m > n$?

4. СЛУ называется *однородной*, если $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$. Пусть $m = n$, и у однородной системы есть только нулевое решение. Докажите, что любая система, получающаяся из данной заменой правой части, будет иметь единственное решение.

5. Пусть $\forall i, j$ выполнено $a_{ij}, b_i \in \mathbb{Q}$. Докажите, что если СЛУ имеет какое-то решение, то она имеет решение в рациональных числах.

6. На отрезке $[0, 1]$ отмечены концы, а также конечное число внутренних точек. Известно, что любая внутренняя точка лежит ровно посредине между какими-то двумя отмеченными точками. Докажите, что все отмеченные точки рациональны.

7. Есть 101 корова. Если убрать любую корову, то оставшихся можно поделить на две равных по весу и численности части. Докажите, что коровы весят одинаково, если вес каждой коровы

a) целый;
b) рациональный;
c) вещественный.