11 класс	Покраска графов	14 сентября 2015

Определение 1. Будем обозначать $V(G)$ количество вершин в графе G.

Определение 2. Пусть G – некоторый граф, u и v – некоторые его вершины, соединённые ребром. Будем обозначать $G - uv$ граф, полученный из G удалением ребра uv, а $G * uv$ граф, в котором u и v стянуты в одну вершину.

Определение 3. Для любого графа G и натурального числа x обозначим через $\chi_G(x)$ количество правильных раскрасок вершин графа G в x цветов (в дальнейшем будем называть функцию $\chi_G(x)$ *хроматическим многочленом*).

1. Пусть G – непустой граф, u и v – две его вершины, соединённые ребром. Докажите, что

$$\chi_{G-uv}(k) = \chi_G(k) + \chi_{G*uv}(k).$$

2. Найдите хроматический многочлен

а) пустого графа на n вершинах;

б) полного графа на n вершинах;

в) дерева на n вершинах;

г) простого цикла на n вершинах.

3. **а)** Докажите, что для любого графа функция $\chi_G(x)$ является многочленом с целыми коэффициентами, степень которого равна $v(G)$.

б) Докажите, что свободный член хроматического многочлена равен 0.

в) Докажите, что знаки коэффициентов многочлена $\chi_G(x)$ чередуются (то есть, старший коэффициент не меньше нуля, следующий не больше нуля и т.д.).

г) Докажите, что второй коэффициент хроматического многочлена равен по модулю количеству рёбер графа.

4. Дан граф G. Оказалось, что для любого натурального k количество способов правильно покрасить вершины графа G в k цветов равно количеству способов покрасить в k цветов дерево на n вершинах. Докажите, что G и есть дерево на n вершинах.

5. Пусть d — наибольшая степень вершины графа G. Докажите, что вершины графа G можно покрасить в $d^2 + 1$ цвет так, чтобы ни у какой вершины не было двух одноцветных соседей.

6. Рёбра графа раскрашены в $d > 1$ цветов так, что в любом пути из трёх различных рёбер (в том числе и в замкнутом) первое и последнее ребро покрашены в разные цвета. Докажите, что вершины этого графа можно правильным образом раскрасить в d цветов.

7. В графе степень каждой вершины равна 3. Оказалось, что число способов покрасить его рёбра правильным образом в 3 цвета не делится на 4. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов цикл.

11 класс	Покраска графов	14 сентября 2015

Определение 1. Будем обозначать $V(G)$ количество вершин в графе G.

Определение 2. Пусть G – некоторый граф, u и v – некоторые его вершины, соединённые ребром. Будем обозначать $G - uv$ граф, полученный из G удалением ребра uv, а $G * uv$ граф, в котором u и v стянуты в одну вершину.

Определение 3. Для любого графа G и натурального числа x обозначим через $\chi_G(x)$ количество правильных раскрасок вершин графа G в x цветов (в дальнейшем будем называть функцию $\chi_G(x)$ *хроматическим многочленом*).

1. Пусть G – непустой граф, u и v – две его вершины, соединённые ребром. Докажите, что

$$\chi_{G-uv}(k) = \chi_G(k) + \chi_{G*uv}(k).$$

2. Найдите хроматический многочлен

а) пустого графа на n вершинах;

б) полного графа на n вершинах;

в) дерева на n вершинах;

г) простого цикла на n вершинах.

3. а) Докажите, что для любого графа функция $\chi_G(x)$ является многочленом с целыми коэффициентами, степень которого равна $v(G)$.

б) Докажите, что свободный член хроматического многочлена равен 0.

в) Докажите, что знаки коэффициентов многочлена $\chi_G(x)$ чередуются (то есть, старший коэффициент не меньше нуля, следующий не больше нуля и т.д.).

г) Докажите, что второй коэффициент хроматического многочлена равен по модулю количеству рёбер графа.

4. Дан граф G. Оказалось, что для любого натурального k количество способов правильно покрасить вершины графа G в k цветов равно количеству способов покрасить в k цветов дерево на n вершинах. Докажите, что G и есть дерево на n вершинах.

5. Пусть d — наибольшая степень вершины графа G. Докажите, что вершины графа G можно покрасить в $d^2 + 1$ цвет так, чтобы ни у какой вершины не было двух одноцветных соседей.

6. Рёбра графа раскрашены в $d > 1$ цветов так, что в любом пути из трёх различных рёбер (в том числе и в замкнутом) первое и последнее ребро покрашены в разные цвета. Докажите, что вершины этого графа можно правильным образом раскрасить в d цветов.

7. В графе степень каждой вершины равна 3. Оказалось, что число способов покрасить его рёбра правильным образом в 3 цвета не делится на 4. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов цикл.