11 класс | Геометрический разнобой | 10 сентября 2015

1. P — точка пересечения касательных в точках A и B к окружности ω с центром O. Через произвольную точку M на отрезке AB провели прямую, перпендикулярную OM. Эта прямая пересекла прямые PA и PB в точках C и D. Докажите, что M — середина отрезка CD.

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки C_1 и B_1 соответственно такие, что $BC_1 = CB_1$. Докажите, что $BC > B_1C_1$.

3. Точка A_1 — середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точку A. Произвольная окружность, проходящая через точки A и A_1, пересекает прямые AB и AC в точках P и Q. Пусть M и N — середины отрезков BC и PQ соответственно. Докажите, что $MN \perp AA_1$.

4. Дан тетраэдр $ABCD$, в нем I_a, I_b, I_c, I_d — центры вписанных в треугольники BCD, ACD, ABD, ABC окружностей. Оказалось, что отрезки AI_a и BI_b пересекаются. Докажите, что отрезки CI_c и DI_d также пересекаются.

5. В треугольнике ABC на дуге BC описанной окружности треугольника ABC выбрана произвольная точка P. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, M — середина PH, A' — точка, симметричная A относительно M. Докажите, что P — ортоцентр треугольника $A'BC$.

6. a) Можно ли точечный источник света закрыть тремя непрозрачными шарами?
b) А четырьмя?
c) А четырьмя непрозрачными шарами одинакового радиуса?

7. В углы B и C треугольника ABC вписаны окружности ω_b и ω_c с центрами P и Q соответственно. Оказалось, что $\angle BAQ = \angle CAP$. Докажите, что окружность, касающаяся ω_b и ω_c внешним образом и проходящая через A, касается описанной окружности треугольника ABC.

11 класс | Геометрический разнобой | 10 сентября 2015

1. P — точка пересечения касательных в точках A и B к окружности ω с центром O. Через произвольную точку M на отрезке AB провели прямую, перпендикулярную OM. Эта прямая пересекла прямые PA и PB в точках C и D. Докажите, что M — середина отрезка CD.

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки C_1 и B_1 соответственно такие, что $BC_1 = CB_1$. Докажите, что $BC > B_1C_1$.

3. Точка A_1 — середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точку A. Произвольная окружность, проходящая через точки A и A_1, пересекает прямые AB и AC в точках P и Q. Пусть M и N — середины отрезков BC и PQ соответственно. Докажите, что $MN \perp AA_1$.

4. Дан тетраэдр $ABCD$, в нем I_a, I_b, I_c, I_d — центры вписанных в треугольники BCD, ACD, ABD, ABC окружностей. Оказалось, что отрезки AI_a и BI_b пересекаются. Докажите, что отрезки CI_c и DI_d также пересекаются.

5. В треугольнике ABC на дуге BC описанной окружности треугольника ABC выбрана произвольная точка P. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, M — середина PH, A' — точка, симметричная A относительно M. Докажите, что P — ортоцентр треугольника $A'BC$.

6. a) Можно ли точечный источник света закрыть тремя непрозрачными шарами?
b) А четырьмя?
c) А четырьмя непрозрачными шарами одинакового радиуса?

7. В углы B и C треугольника ABC вписаны окружности ω_b и ω_c с центрами P и Q соответственно. Оказалось, что $\angle BAQ = \angle CAP$. Докажите, что окружность, касающаяся ω_b и ω_c внешним образом и проходящая через A, касается описанной окружности треугольника ABC.