11 класс	Разнобой	7 сентября 2015

1. В однокруговом волейбольном турнире сыграли 57 команд. Докажите, что среди них найдётся команда A такая, что для любой другой команды B либо A победила B, либо A победила кого-то, кто победил B.

2. Коля загадал многочлен $P(x)$ с натуральными коэффициентами, сумма которых не превосходит 38^{38}. Андрей хочет отгадать $P(x)$. Для этого он вправе назвать натуральное число a, в ответ на что Коля сообщит значение $P(a)$. Сможет ли Андрей гарантированно отгадать $P(x)$?

3. Сколько цифр в десятичной записи числа 2^{600}?

4. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное количество комнат, занумерованных числами от минус бесконечности до плюс бесконечности. В комнатах живут 1514 пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов), кроме того, в каждой комнате находится по роялю. Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах k-й и $k+1$-й, приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в $k-1$-ю и $k+2$-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся (пианисты, живущие в одной комнате, друг другу не мешают).

5. Докажите, что для любого простого p существует натуральное n такое, что $2^n + 3^n + 6^n - 1 \,\vdots\, p$.

6. I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC, в котором $\angle A = 60^\circ$. На стороне AB выбрана точка M такая, что $IM \parallel AC$. На стороне BC выбрана точка K такая, что $\angle BMK = \angle IBM$. Чему равно отношение BK/BC?

7. $2N$ интеллектуалов проходят тест на IQ из $2k$ вопросов, на каждый из которых можно ответить только «да» или «нет». Для любой пары вопросов известно, что ровно половина интеллектуалов ответила одинаково на оба вопроса (либо оба ответа «да», либо оба — «нет»). Докажите, что количество интеллектуалов, которые ответили ровно на половину вопросов «да», не превосходит $2N - \frac{N}{k}$.

11 класс	Разнобой	7 сентября 2015

1. В однокруговом волейбольном турнире сыграли 57 команд. Докажите, что среди них найдётся команда A такая, что для любой другой команды B либо A победила B, либо A победила кого-то, кто победил B.

2. Коля загадал многочлен $P(x)$ с натуральными коэффициентами, сумма которых не превосходит 38^{38}. Андрей хочет отгадать $P(x)$. Для этого он вправе назвать натуральное число a, в ответ на что Коля сообщит значение $P(a)$. Сможет ли Андрей гарантированно отгадать $P(x)$?

3. Сколько цифр в десятичной записи числа 2^{600}?

4. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное количество комнат, занумерованных числами от минус бесконечности до плюс бесконечности. В комнатах живут 1514 пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов), кроме того, в каждой комнате находится по роялю. Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах k-й и $k+1$-й, приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в $k-1$-ю и $k+2$-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся (пианисты, живущие в одной комнате, друг другу не мешают).

5. Докажите, что для любого простого p существует натуральное n такое, что $2^n + 3^n + 6^n - 1 \,\vdots\, p$.

6. I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC, в котором $\angle A = 60^\circ$. На стороне AB выбрана точка M такая, что $IM \parallel AC$. На стороне BC выбрана точка K такая, что $\angle BMK = \angle IBM$. Чему равно отношение BK/BC?

7. $2N$ интеллектуалов проходят тест на IQ из $2k$ вопросов, на каждый из которых можно ответить только «да» или «нет». Для любой пары вопросов известно, что ровно половина интеллектуалов ответила одинаково на оба вопроса (либо оба ответа «да», либо оба — «нет»). Докажите, что количество интеллектуалов, которые ответили ровно на половину вопросов «да», не превосходит $2N - \frac{N}{k}$.