

Серия 37. Целые гауссовы числа.

301. Пусть p – целое простое гауссово число. Какое наибольшее количество различных целых гауссовых чисел можно взять так, чтобы разность никаких двух не делилась на p ?

302. *Малая теорема Ферма.* Пусть p – целое простое гауссово число. Докажите, что для любого целого гауссового z число $z^{N(z)} - z$ делится на p .

Под словом «делится» в этих задачах подразумевалось, что частное – это целое гауссово число.

303. *Описание пифагоровых троек.* Докажите, что если числа a и b взаимно простые и $a^2 + b^2$ – квадрат целого числа, то либо $a + bi$, либо $b + ai$ является квадратом целого гауссова.

304. Решите в целых числах уравнение $x^2 + 1 = a^b$, где $b > 1$.

О других кольцах.

305. Найдите в кольце $a + b\sqrt{5}i$ число, которое представляется в виде произведения простых элементов более, чем одним способом.

306. А можно ли найти такой элемент в числах вида $a + b\sqrt{2}i$?

307. Решите в целых числах уравнение $x^2 + 2 = y^3$.

308. Докажите, что если два числа представляются в виде $a^2 - ab + b^2$ с целыми a и b , то их произведение тоже.

309*. Используя числа вида $a + b\omega$, где ω – корень третьей степени из единицы, докажите, что уравнение $a^3 + b^3 = c^3$ не имеет решений в натуральных числах.