

### Серия 37. Целые гауссовы числа.

**301.** Пусть  $p$  – целое простое гауссово число. Какое наибольшее количество различных целых гауссовых чисел можно взять так, чтобы разность никаких двух не делилась на  $p$ ?

**302.** *Малая теорема Ферма.* Пусть  $p$  – целое простое гауссово число. Докажите, что для любого целого гауссового  $z$  число  $z^{N(z)} - z$  делится на  $p$ .

*Под словом «делится» в этих задачах подразумевалось, что частное – это целое гауссово число.*

**303.** *Описание пифагоровых троек.* Докажите, что если числа  $a$  и  $b$  взаимно простые и  $a^2 + b^2$  – квадрат целого числа, то либо  $a + bi$ , либо  $b + ai$  является квадратом целого гауссова.

**304.** Решите в целых числах уравнение  $x^2 + 1 = a^b$ , где  $b > 1$ .

*О других кольцах.*

**305.** Найдите в кольце  $a + b\sqrt{5}i$  число, которое представляется в виде произведения простых элементов более, чем одним способом.

**306.** А можно ли найти такой элемент в числах вида  $a + b\sqrt{2}i$ ?

**307.** Решите в целых числах уравнение  $x^2 + 2 = y^3$ .

**308.** Докажите, что если два числа представляются в виде  $a^2 - ab + b^2$  с целыми  $a$  и  $b$ , то их произведение тоже.

**309\*.** Используя числа вида  $a + b\omega$ , где  $\omega$  – корень третьей степени из единицы, докажите, что уравнение  $a^3 + b^3 = c^3$  не имеет решений в натуральных числах.